Mathematatik 10b

Schuljahr 18/19

Organisation:

11.9.18

Heft/Ordner:

* Übungsheft und Merkheft (oder Ordner)
* kariert A4

Klassenarbeiten:

* 4 KA
* ca. 4 Kurztests (angesagt, als 1 KA)

Verhältnis:

* 60% schriftlich
* 40% mündlich

Kontakt:

* schule@lehrer-kimmig.de
* wiki.lehrer-kimmig.de
* ab.lehrer-kimmig.de

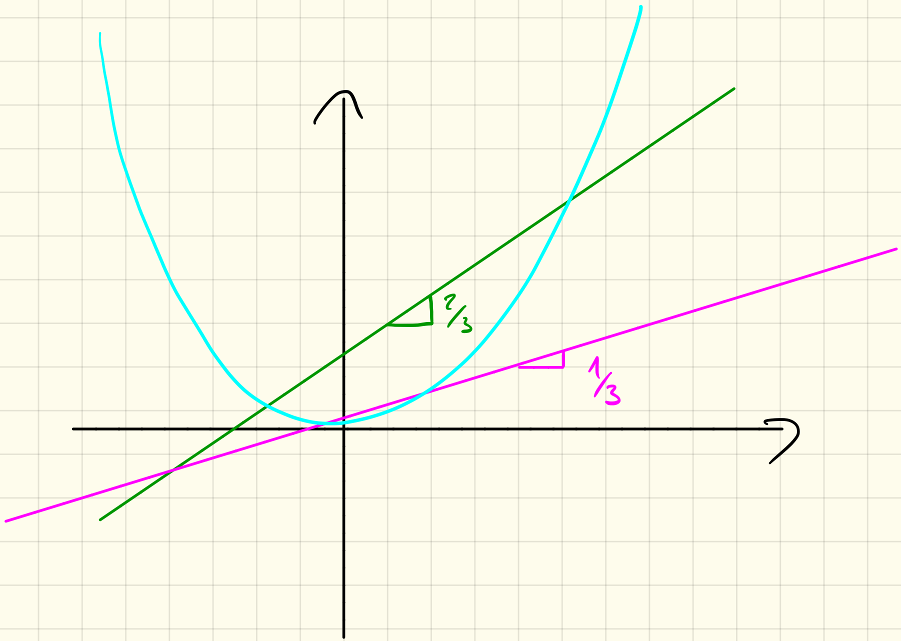
GFS möglich

Material:

* Buch im Unterricht dabei haben! (zu zweit)
* Geodreieck (jeder)
* Bleistift und einige Farben

Inhalte:

I. Zuordnungen und Funktionen
II. Differenzialrechnung
III. Vektoren
IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Binomialverteilung
V. Funktionsanalyse
VI. Trigonometrie



I. Zuordnungen und Funktionen
I.1 Mengen

Eine Menge besteht aus mehreren Dingen, wie z.B. Backzutaten, Menschen, Tieren, Einheiten, Zahlen, ...

Die einzelnen Dinge einer Menge heißen <u>Elemente</u>.

Beispiele:

Schüler 10b = {Tobi, Claudio, Emil, Nils, ...}

Schulfächer = {Mathe, Deutsch, Physik, ...}

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

Bekannte Mengen aus der Mathematik:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{7}{3}, 5, \ldots\}$ rationale Zahlen (Brüche)

$\mathbb{R} = \{\pi, \sqrt{3}, 0.1, 5, -6, \ldots\}$ reelle Zalen ("alle" Zahlen)

Aufgabe (mündlich):

Beschreibe mit Worten, welche Mengen gemeint sind:

A = {4 , 8 , 12 , 16 , …} Vielfache von 4

B = {6 , 12 , 18 , 24 , …} Vielfache von 6

C = {1/2 , 1/3 , 1/4 , …} Brüche mit 1 im Zähler

D = {1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12} Alle Teiler von 12

E = {2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , …} Primzahlen

F = {1 , 4 , 9 , 16 , 25 , …} Quadratzahlen

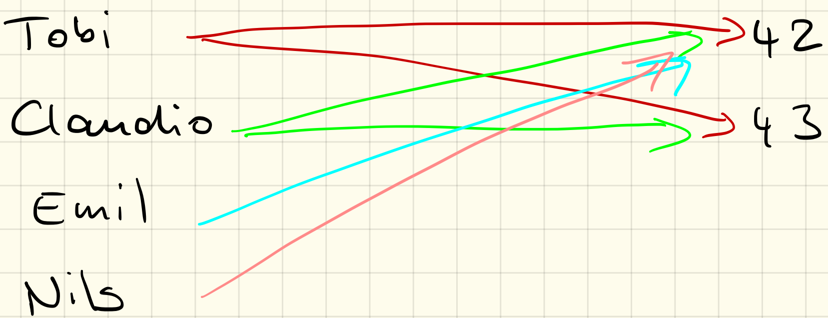
1^2 2^2 3^2 4^2 5^2

I.2 Zuordnungen und Funktionen

Elementen einer sogenannten <u>Definitionsmenge D_f</u> werden bei einer <u>Zuordnung</u> Elemente einer sogenannten <u>Wertemenge W</u> zugeordnet

Beispiel:

Definitionsmenge | Zuordnung: Schuhgröße | Wertemenge



Mathematisches Beispiel:

Definitionsmenge

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Wertemenge

Eine <u>Funktion</u> ordnet jedem Element der Definitionsmenge maximal ein Element der Wertemenge zu.

Aufgabe (mündlich):

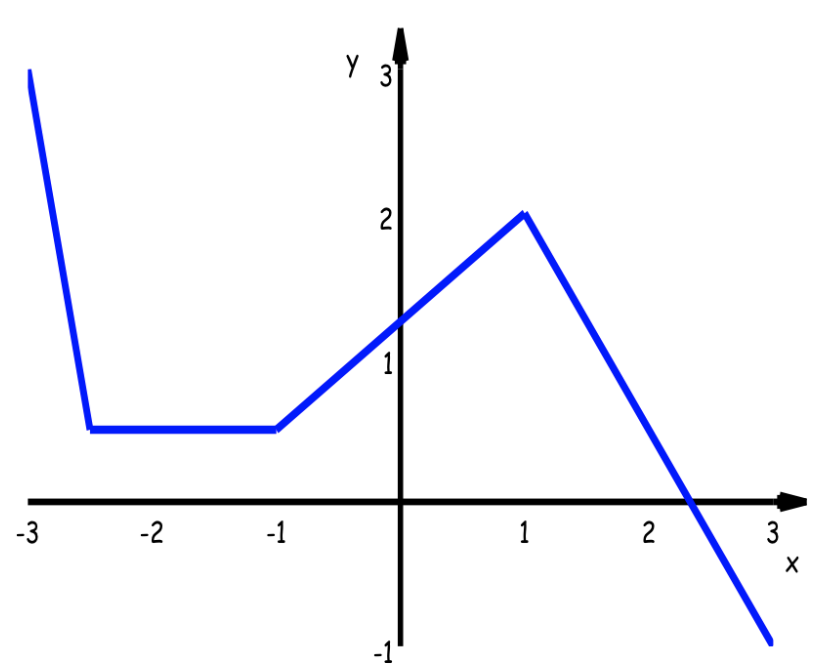
Ist diese Zuordnung eine Funktion?

x	y
1	-5
3	1
5	4
-2	6
3	2
-4	-3
0	7
6	0

nein!

Aufgabe (mündlich)

Stellt dieses Schaubild eine Funktion dar?



ja!

Aufgabe (mündlich):

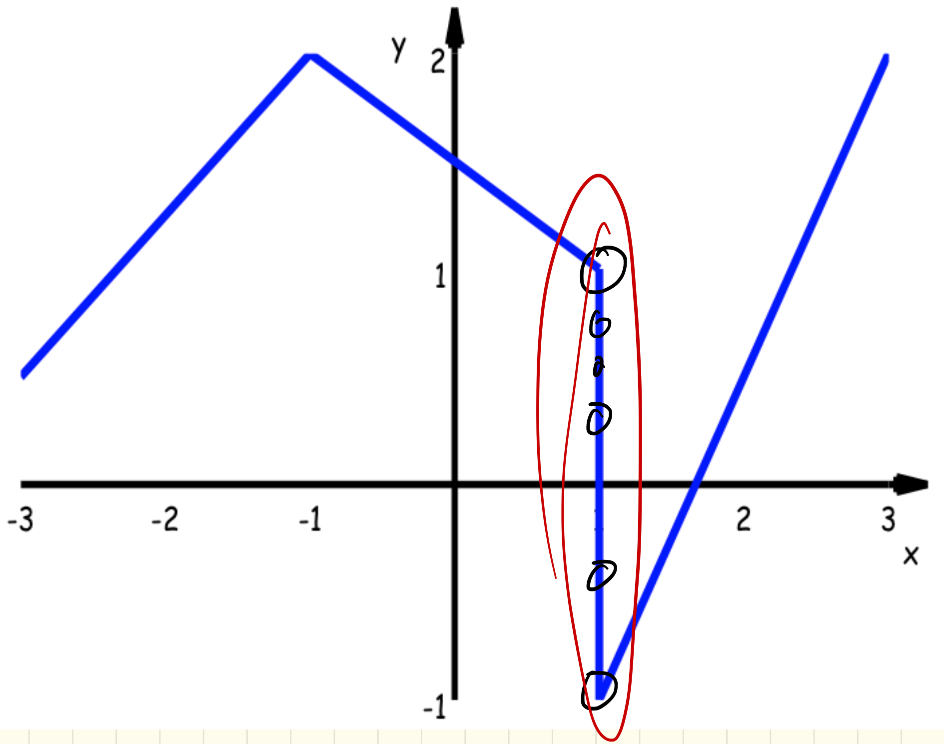
Ist diese Zuordnung eine Funktion?

x	y
-6	9
0	6
7	0
3	4
2	3
4	5
1	3
3	4

ja!

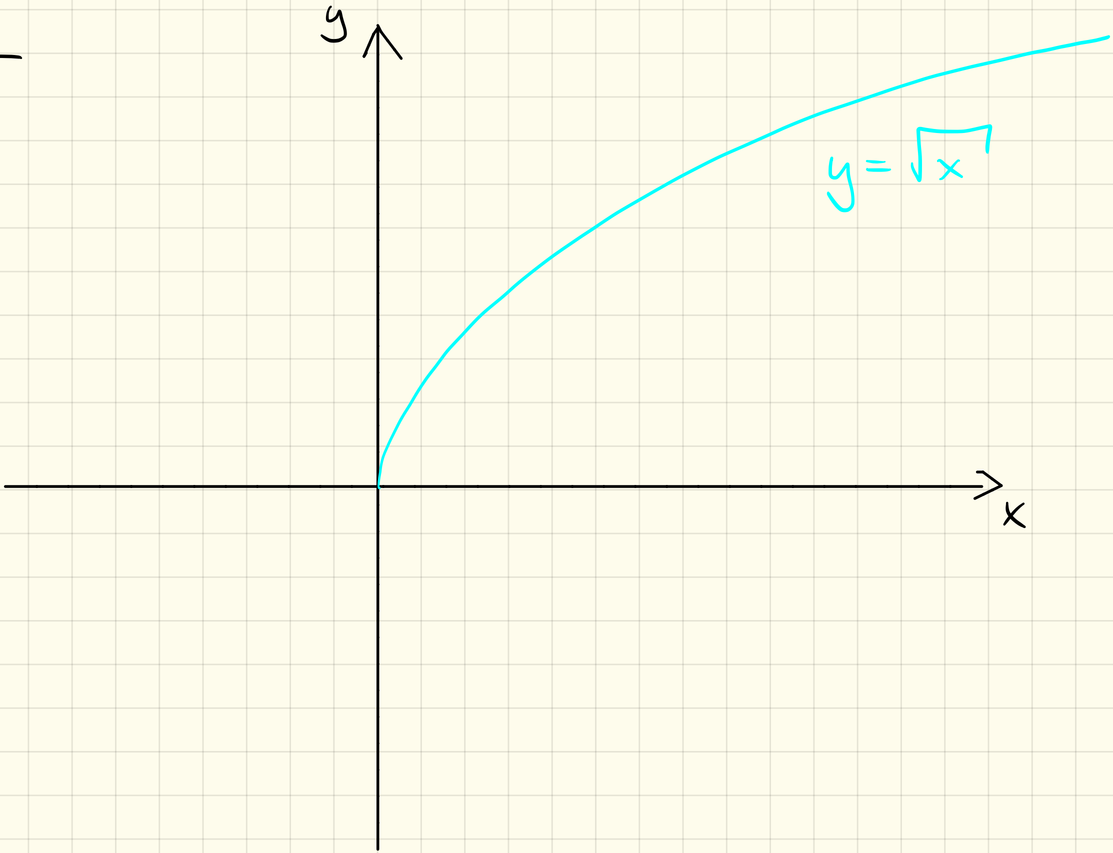
Aufgabe (mündlich):

Stellt dieses Schaubild eine Funktion dar?



nein!

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
-4	—
-9	—



I.2.1 Darstellungsarten von Funktionen

Funktionsgleichung $\qquad y = x^2 + 1$

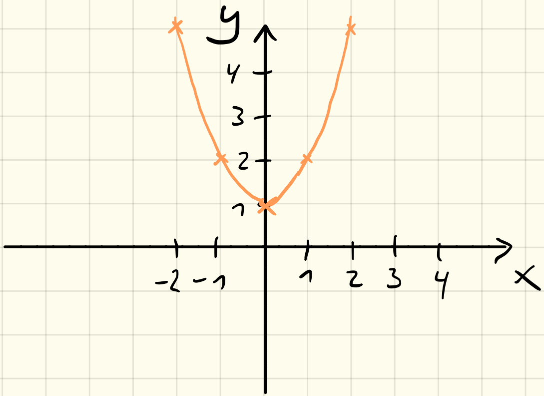
einsetzen und ausrechnen

Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5	10	17

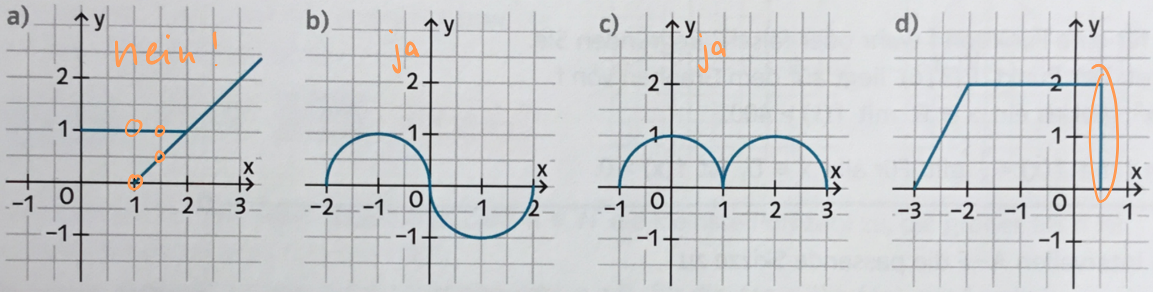
Punkte einzeichnen

Graph im Koordinatensystem



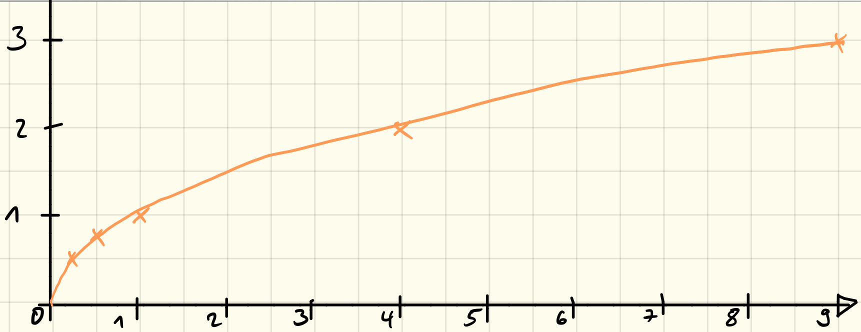
Aufgaben

1 Ist der Graph einer Funktion dargestellt? Begründen Sie Ihre Antwort.



2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$.
Ergänzen Sie im Heft die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von f.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	4 0	0,5	0,71	1	1,41	1,73	2	2,23	2,44	2,64	2,82	3



I.3 Intervalle

Da Definitions- und Wertemenge oft in den reellen Zahlen liegen, benutzt man zu deren Beschreibung oft die Intervallschreibweise.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ -> Definitionsmenge ohne negative Zahlen?

-> $D: \quad 0 \leq x < \infty$

-> $x \in [0, \infty)$

Beispiel 2: $\sqrt{\frac{1}{x}}$ -> $D: \quad 0 < x < \infty$

-> $x \in (0, \infty)$

Beispiele:

$x \in [5,7]$ meint: $5 \leq x \leq 7$

$x \in (3,9]$ meint: $3 < x \leq 9$

$x \in [1,6)$ meint: $1 \leq x < 6$

$x \in (-2,5)$ meint: $-2 < x < 5$

I.4 Definitions- und Wertemenge von Funktionen

Merke: Definitionsmenge sind alle Zahlen, die man in die Funktion einsetzen darf (x - Werte)

Wertemenge sind alle möglichen Ergebnisse (y - Werte)

Beispiel: $f(x) = x^2 - 5$

$D: \ x \in (-\infty, \infty)$

$W: \ y \in [-5, \infty)$

Beispiel 2: $f(x) = -x^2 + 1$

D: $x \in (-\infty, \infty)$ oder $x \in \mathbb{R}$

W: $y \in (-\infty, 1]$

18.9.18

Aufgabe: Bestimme den Definitions- und Wertebereich von $f(x) = \frac{1}{x^2}$

D: alles außer 0 , $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

reelle Zahlen

außer

Null

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \notin \{0\}$

Element der Menge

W: $(0, \infty)$

S. 9, Nr. 10

10 Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f.

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ c) $f(x) = 1{,}5$ d) $f(x) = -0{,}5x + 1$

a)
$D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$W = [1, \infty)$

b)
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$W = (1, \infty)$

c)
$D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$W = \cancel{[1{,}5, 1{,}5]} = \{1{,}5\}$

d)
$D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$W = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

S. 8. Nr. 4+5

○ **4** Welche Aussagen drücken denselben Sachverhalt für eine Funktion f aus?

A: $1 \notin W_f$

B: $1 \in D_f$

C: $1 \in W_f$

D: $1 \notin D_f$

E: Der Graph von f enthält einen Punkt mit der x-Koordinate 1.

F: Die Funktion f ist für x = 1 nicht definiert.

G: 1 ist ein Funktionswert von f.

H: Auf dem Graphen von f liegt kein Punkt mit der y-Koordinate 1.

○ **5** Statt „Der Funktionswert von f an der Stelle 2 ist 7." schreibt man kurz f(2) = 7. Drücken Sie entsprechend in mathematischer Kurzschrift aus.

a) Durch die Funktion f wird der Zahl $\sqrt{7}$ die Zahl 8 zugeordnet. $f(\sqrt{7}) = 8$

b) Die Funktion g nimmt an der Stelle 3,5 den Funktionswert −1 an. $g(3{,}5) = -1$

c) Die Funktionen f und g nehmen an der Stelle 5 denselben Funktionswert an. $f(5) = g(5)$

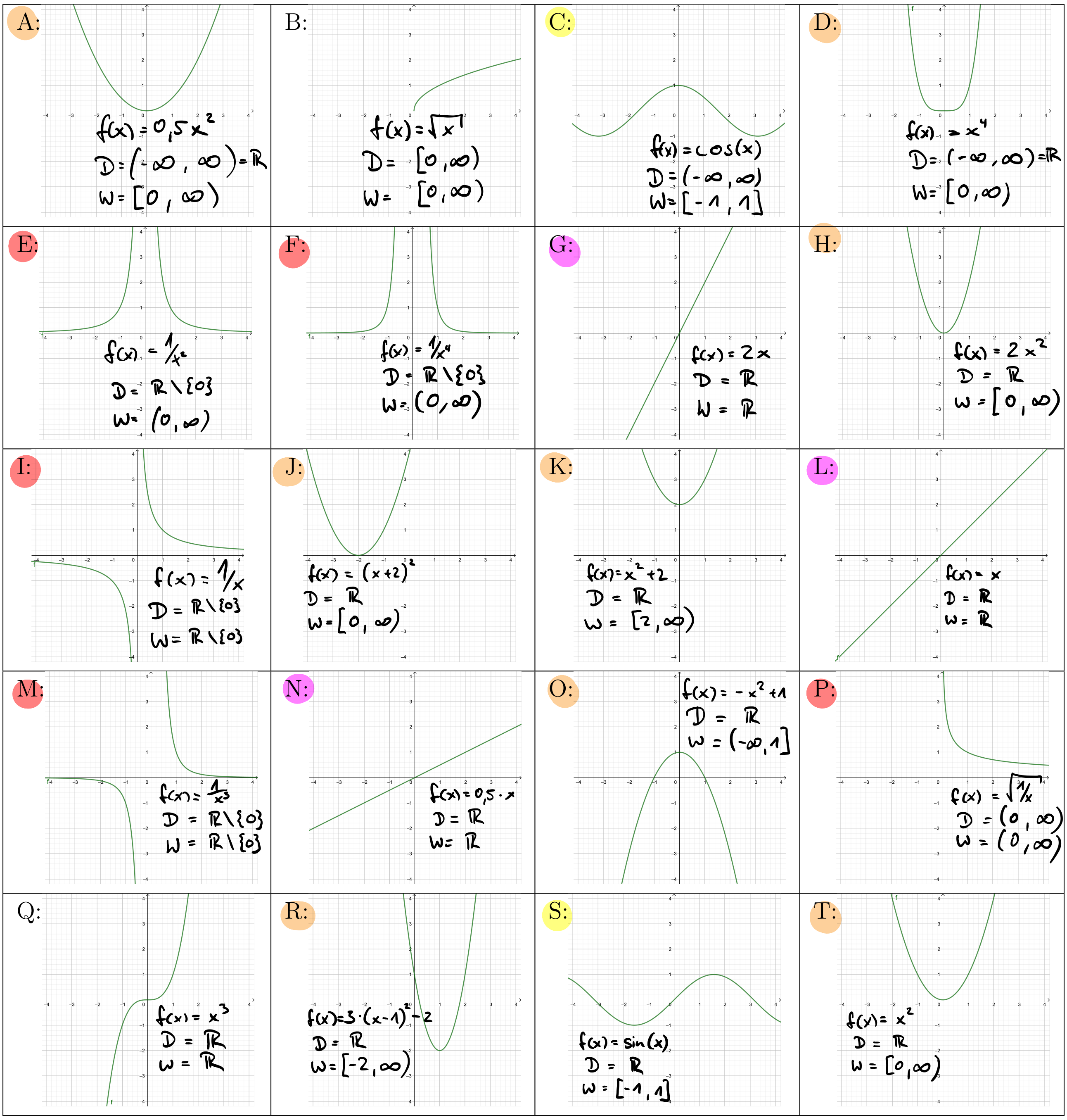
d) Wenn man in den Funktionsterm von h die Zahl 3 einsetzt, erhält man 19.

$h(3) = 19$

20.9.18

Graphen einfacher Funktionen

Ordne den Schaubildern die Funktionen zu und gib den Definitions- und Wertebereich an.

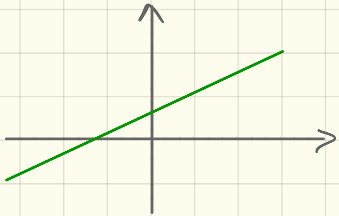


- x
- $0.5 \cdot x$
- $2 \cdot x$
- x^2
- $0.5 \cdot x^2$
- $2 \cdot x^2$
- $(x+2)^2$
- $x^2 + 2$
- $-x^2 + 1$
- $3 \cdot (x-1)^2 - 2$
- x^3
- x^4
- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{1}{x^3}$
- $\frac{1}{x^4}$
- $\sqrt{x}$
- $\sqrt{\frac{1}{x}}$
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$

I. 5 Funktionsklassen

Wir können Funktionen in verschiedene Gruppen einteilen:

1. lineare Funktionen:

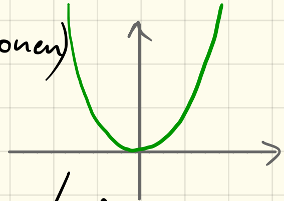


Gerade im Schaubild

$f(x) = x$ / $f(x) = x + 2$ / $f(x) = 2x$

-> kein Exponent bei x

2. Parabeln: (quadratische Funktionen)



Bogen im Schaubild

$f(x) = x^2$ / $f(x) = x^2 + 1$ / $f(x) = 0{,}5\,x^2$

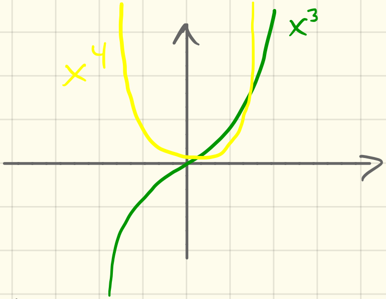
-> Als Exponent bei x immer 2

3. ganzrationale Funktionen

$f(x) = x^3$ / $f(x) = x^4$ /

$f(x) = 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2$

-> auch höhere Exponenten möglich



25.9.18

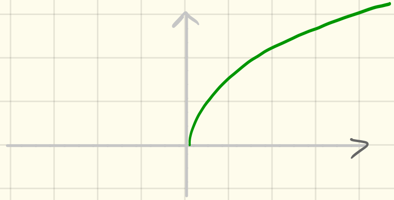
4. gebrochenrationale Funktionen

$f(x) = \frac{1}{x}$ / $f(x) = \frac{1}{x^2}$

-> x steht im Nenner

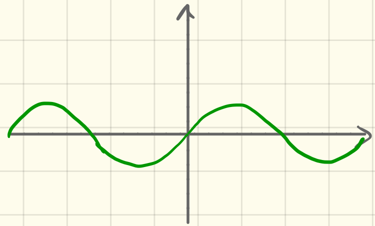
5. Wurzelfunktion

$f(x) = \sqrt{x}$



6. Trigonometrische Funktionen

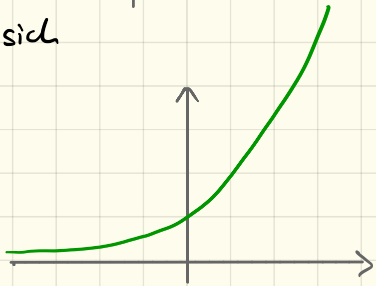
$f(x) = \sin(x)$ / $f(x) = \cos(x)$ /



$f(x) = \tan(x)$

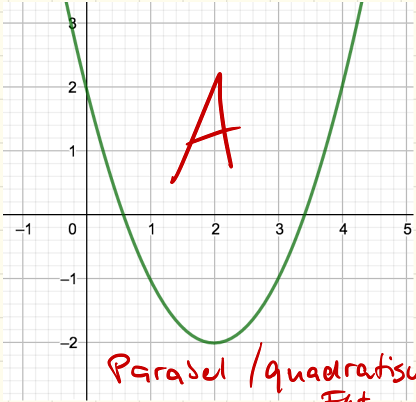
→ periodische Funktionen, wiederholen sich

7. Exponentialfunktionen



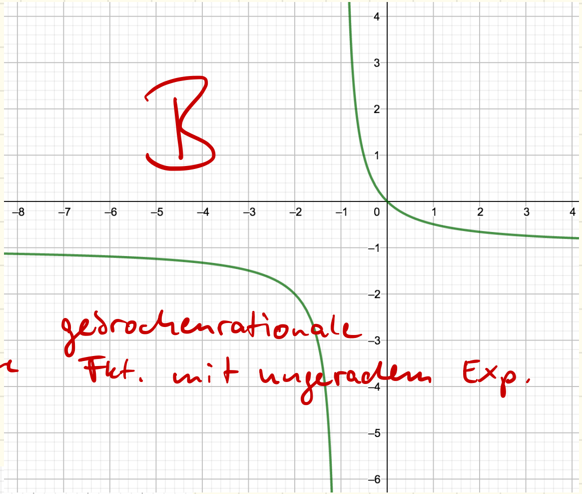
$f(x) = 2^x$

→ x steht im Exponent



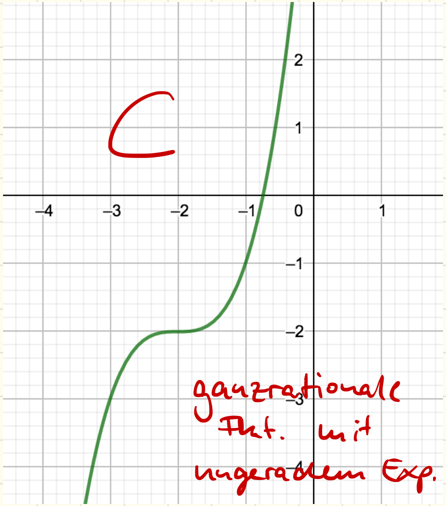
A

Parabel / quadratische Fkt.



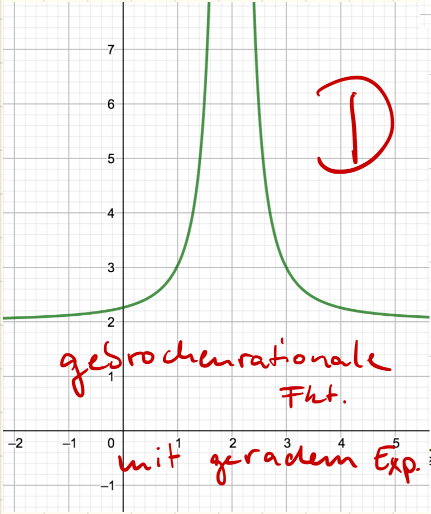
B

gebrochenrationale Fkt. mit ungeradem Exp.



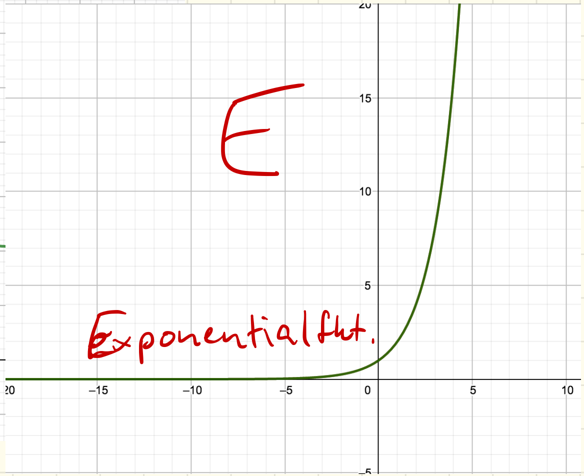
C

ganzrationale Fkt. mit ungeradem Exp.



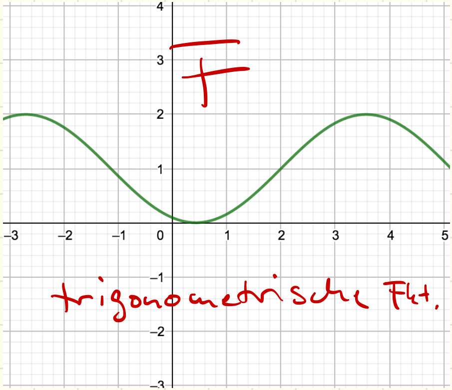
D

gebrochenrationale Fkt. mit geradem Exp.



E

Exponentialfkt.



F

trigonometrische Fkt.

I.6 Verschieben und Strecken von Funktionen / Graphen

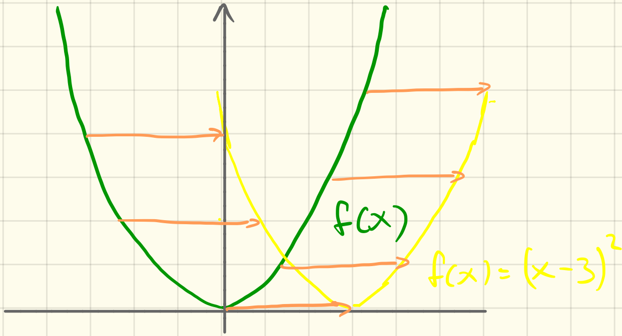
Wir können die sogenannte <u>Normalparabel</u> im Schaubild verschieben oder Strecken indem wir verschiedene Parameter verändern.

1. Verschiebung in y-Richtung

Die Normalparabel wird um einen Wert c nach oben verschoben, indem wir den Wert c zur Funktion dazu addieren.

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x) = x^2 + 2$$

2. Verschiebung in x - Richtung



Eine Funktion kann nach rechts (oder links) verschoben werden, indem wir x durch (x - b) ersetzen

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x) = (x-b)^2$$

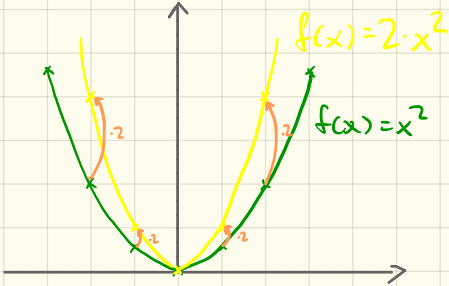
Achtung: Verschiebung nach rechts → Minus in Klammer
Verschiebung nach links → Plus in Klammer

Beispiel: Verschiebe $f(x) = x^2$ um 4 nach unten und 3 nach links

$$\longrightarrow \quad f(x) = (x+3)^2 - 4$$

nach links nach unten

3. Streckung



Eine Funktion wird um einen Faktor a gestreckt, indem wir diesen mit der Funktion multiplizieren.

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x) = a \cdot x^2$$

Beispiel: $f(x) = x^2$ soll um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt, um 2 nach oben und um 1 nach rechts verschoben werden:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + 2$$

Aufgabe: S. 11 A1

1 Wie erhält man aus dem Graphen von f mit $f(x) = x^2$ den Graphen von g?

a) $g(x) = x^2 - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

d) $g(x) = (x - 3)^2$

e) $g(x) = x^2 + 1{,}5$

f) $g(x) = (x + 4)^2$

g) $g(x) = x^2 + 0{,}5$

h) $g(x) = 0{,}6x^2$

Mögliche GFS-Themen Mathe Klasse 10

Funktionsanalyse

- Polynomdivision
- Brennpunkt einer Parabel
- Trassierungen
- Parameterdarstellung von Kurven

Geometrie

- Kugelgeometrie
- Vektoren und Punkte im Raum

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Pascal’sches Dreieck
- Erwartungswert
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Galtonbrett

Mögliche GFS-Themen in Physik Klasse 10

Mechanik

- Leichtathletik physikalisch betrachtet: Optimaler Absprung beim Weitsprung
- Kreisbewegungen in der Natur
- Geostationäre Satelliten
- Warum fällt ein Kreisel nicht um?

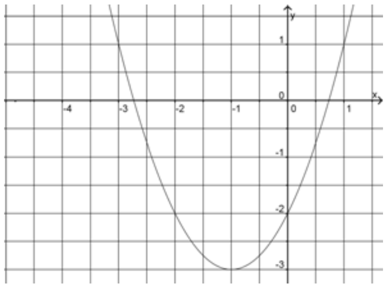
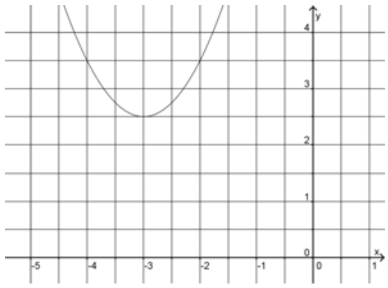
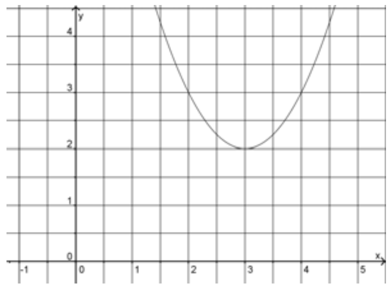
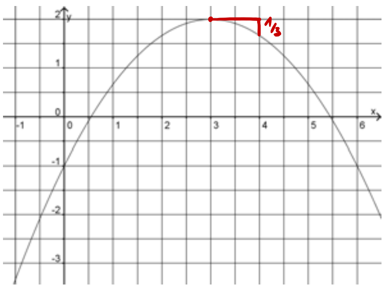
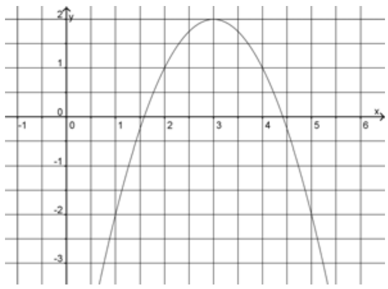
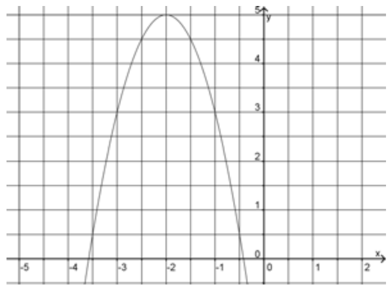
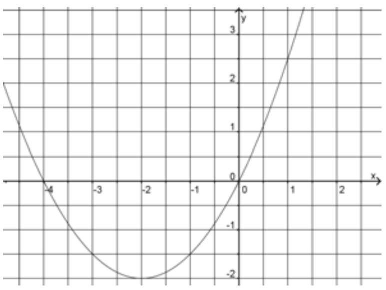
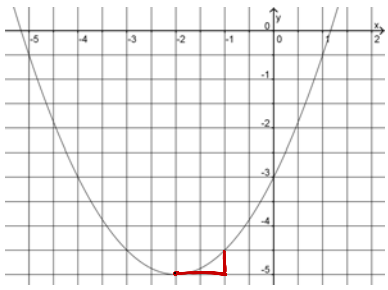
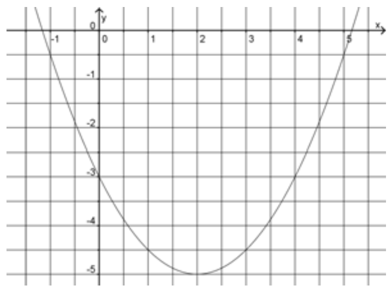
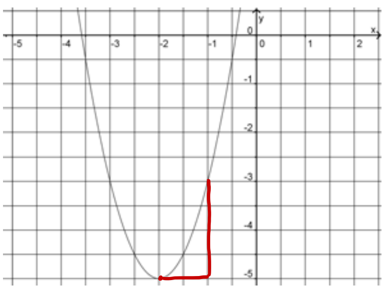
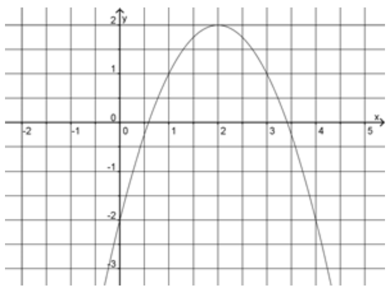
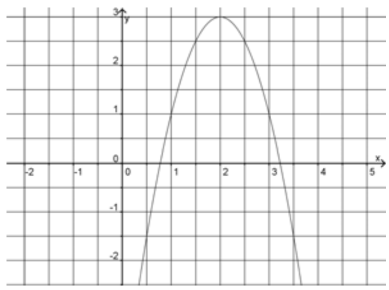
Atomphysik

- Marie Curie und ihre Forschungen
- Auswirkung von Strahlung auf den Körper

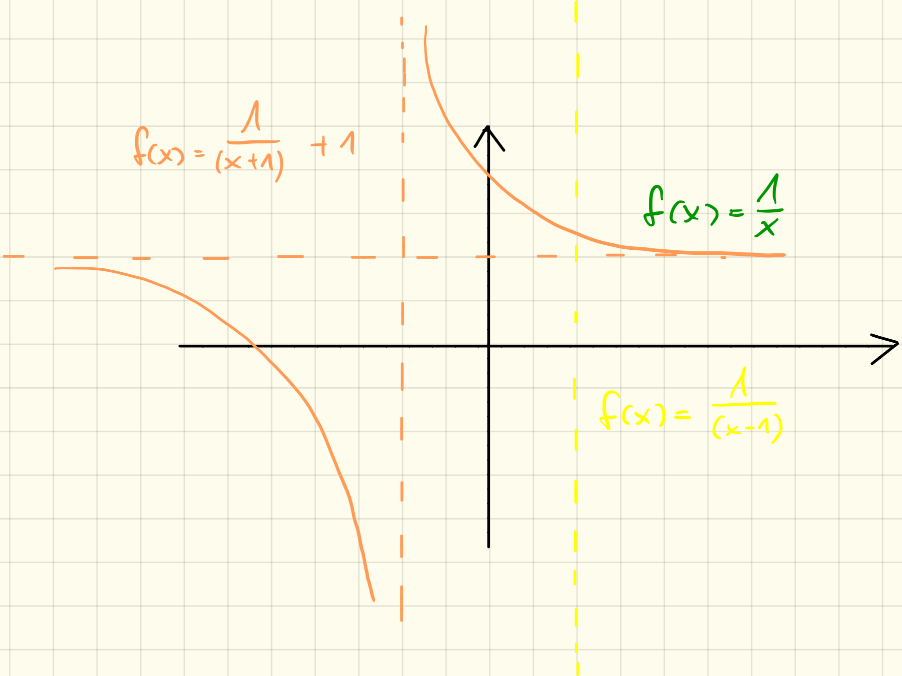
Energie

- Energieerhaltungssatz beim Treibhauseffekt

Ordne den Schaubildern die richtigen Gleichungen zu.

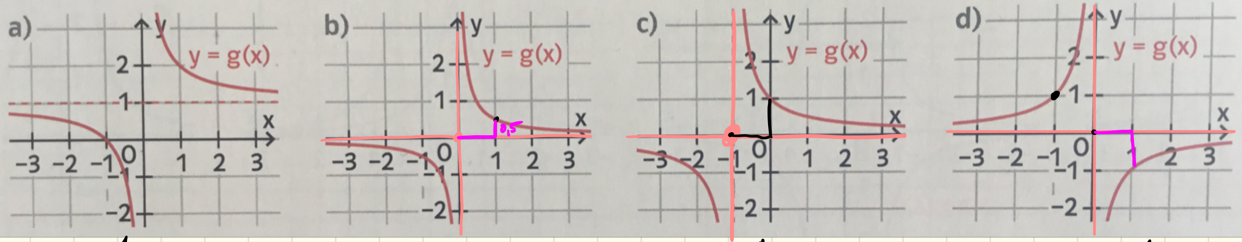
		
$y = (x+1)^2 - 3$	$y = (x+3)^2 + 2{,}5$	$y = (x-3)^2 + 2$
		
$y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$	$y = -(x-3)^2 + 2$	$y = -2(x+2)^2 + 5$
		
$y = 0{,}5(x+2)^2 - 2$	$y = 0{,}5(x+2)^2 - 5$	$y = 0{,}5(x-2)^2 - 5$
		
$y = 2 \cdot (x+2)^2 - 5$	$y = -(x-2)^2 + 2$	$y = -2(x-2)^2 + 3$
$y = 0{,}5(x+2)^2 - 2$	$y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$	$y = 0{,}5(x-2)^2 - 5$
$y = -(x-3)^2 + 2$	$y = 0{,}5(x+2)^2 - 5$	$y = -2(x-2)^2 + 3$
$y = -2(x+2)^2 + 5$	$y = (x+1)^2 - 3$	$y = -(x-2)^2 + 2$
$y = (x-3)^2 + 2$	$y = 2(x+2)^2 - 5$	$y = (x+3)^2 + 2{,}5$

Test: wie Arbeitsblatt am 5.10.



S. 12 A4 28.9.18

4 Beschreiben Sie, wie man den Graphen der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ (Fig. 1) erhält, und geben Sie einen Funktionsterm für g an.



$y = \frac{1}{x} + 1$ $y = 0{,}5 \cdot \frac{1}{x}$ $y = \frac{1}{(x+1)}$ $y = -\frac{1}{x}$

S.12 A3

a) $f(x) = x^2$

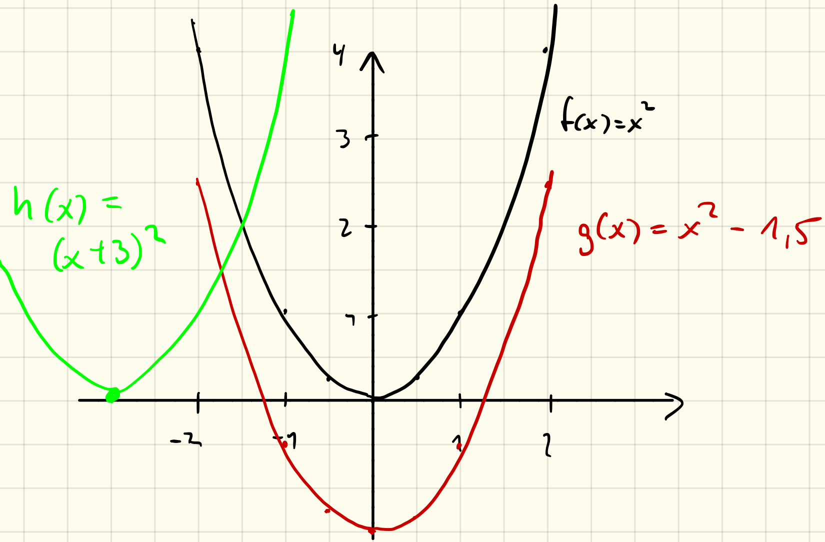
$g(x) = x^2 - 1{,}5$

$h(x) = (x + 3)^2$

b) $f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 + 1$

$h(x) = (x - 3)^2$

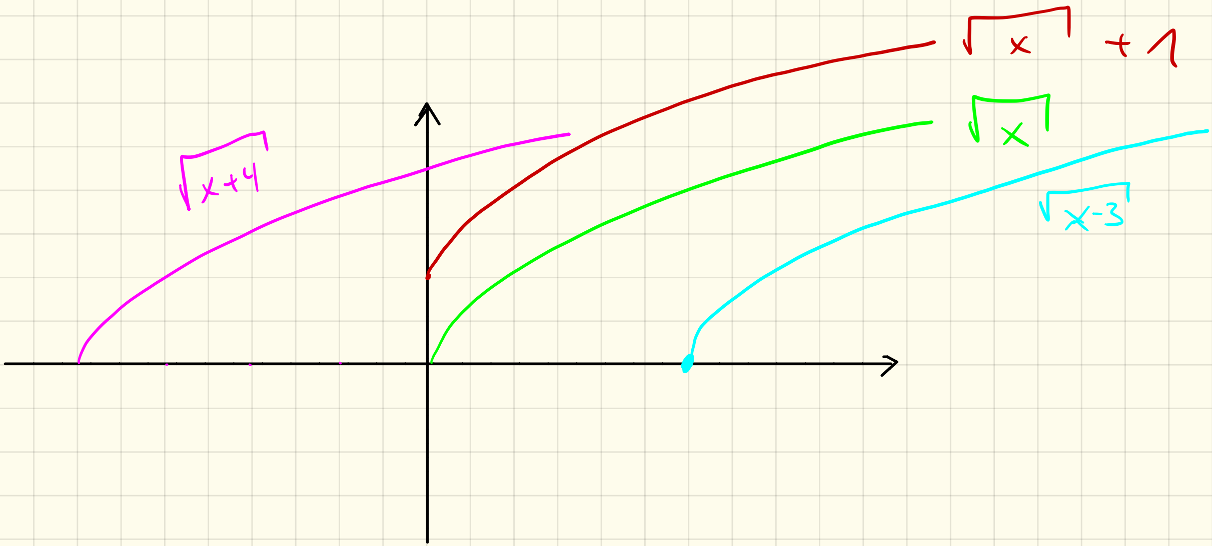


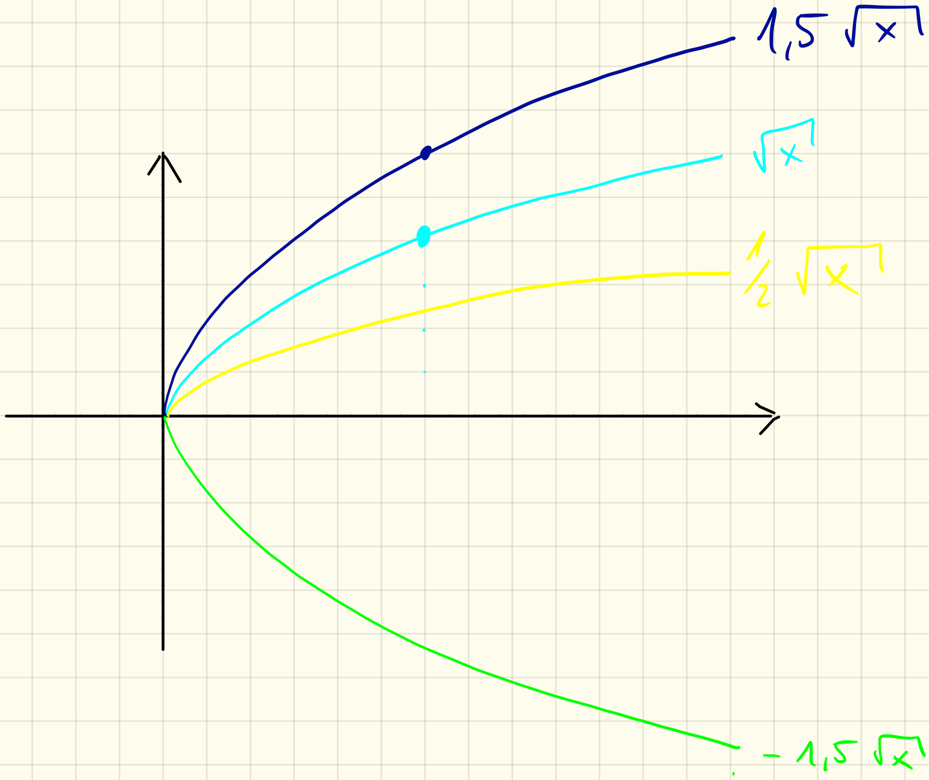
S.12 A5

5 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = \sqrt{x} + 1$ $\quad h(x) = \sqrt{x - 3}$ $\quad i(x) = \sqrt{x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = 1{,}5\sqrt{x}$ $\quad h(x) = -1{,}5\sqrt{x}$ $\quad i(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

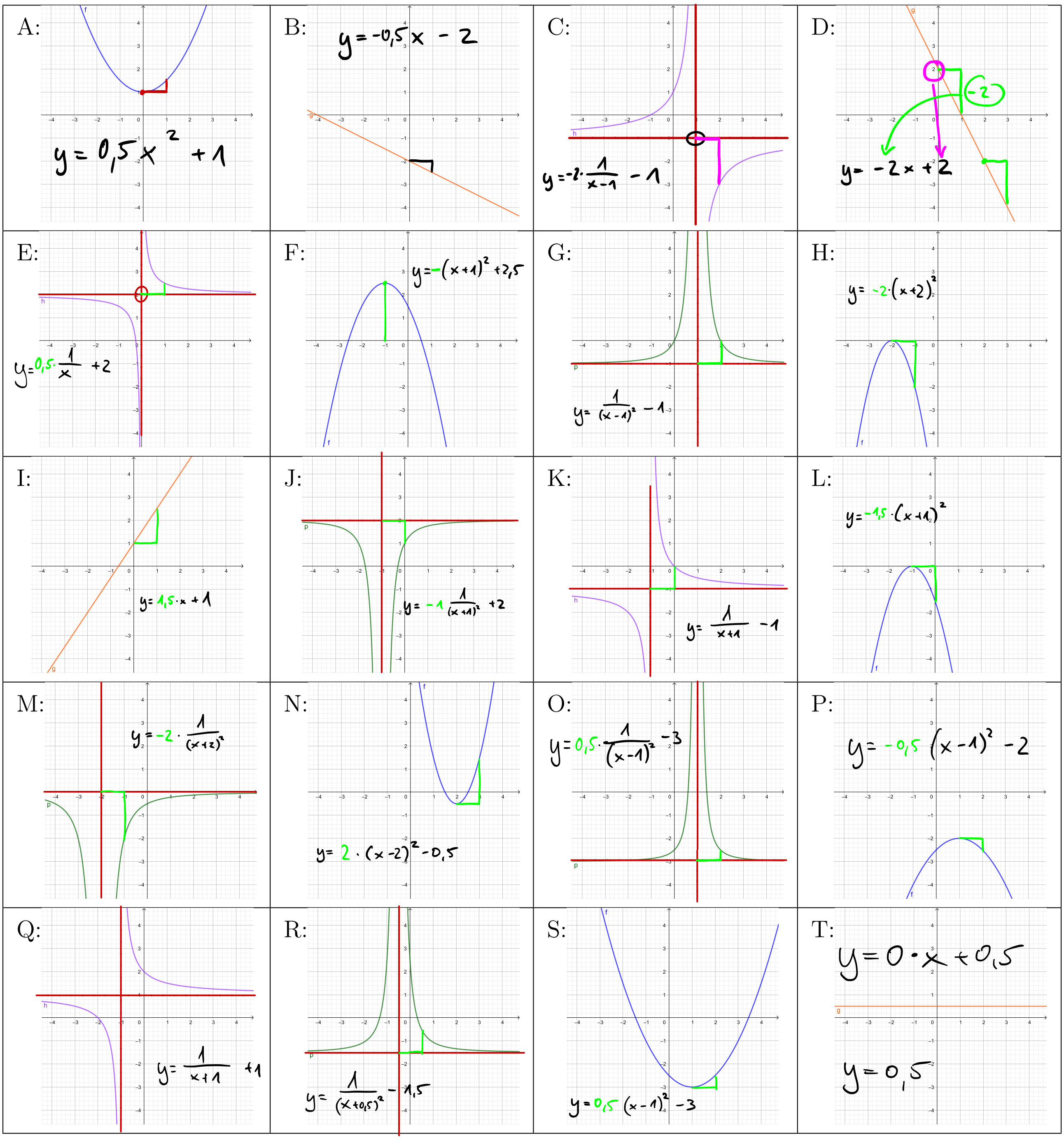




$1{,}5\sqrt{x}$
$\sqrt{x}$
$\frac{1}{2}\sqrt{x}$
$-1{,}5\sqrt{x}$

Verschobene Funktionen

Gib für jedes Schaubild die entsprechende Funktion an.



II. Differenzialrechnung

II.1 mittlere Änderungsrate

Bei einer Autofahrt von Stuttgart nach Hannover legt man folgende Strecken zurück:

Zeit in h	0	1	2	3	4	5
Strecke in km	0	130	185	320	470	510

a) Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit?

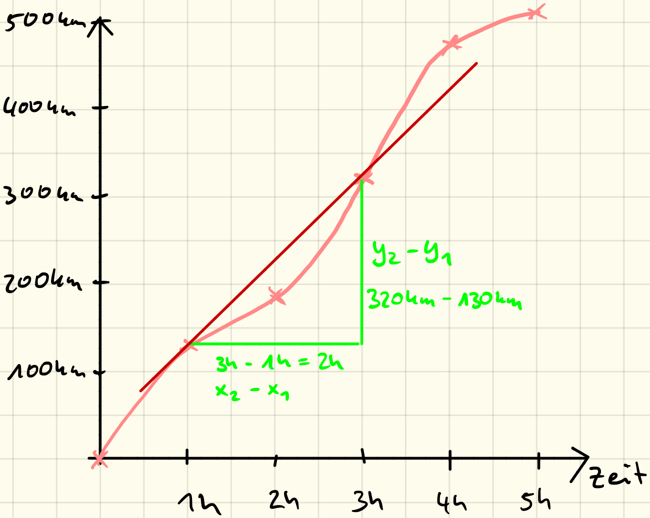
b) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Stunde 1 und 3?

a) $\frac{510\,km}{5\,h} = 102\,\frac{km}{h}$

b) $\frac{320\,km - 130\,km}{3\,h - 1\,h} = \frac{190\,km}{2\,h} = 95\,\frac{km}{h}$

Der sogenannte <u>Differenzenquotient</u> ist der Quotient aus folgenden beiden Differenzen:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

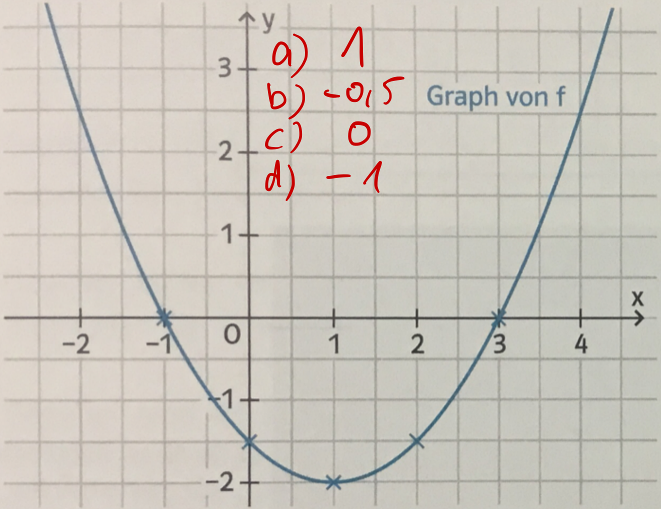


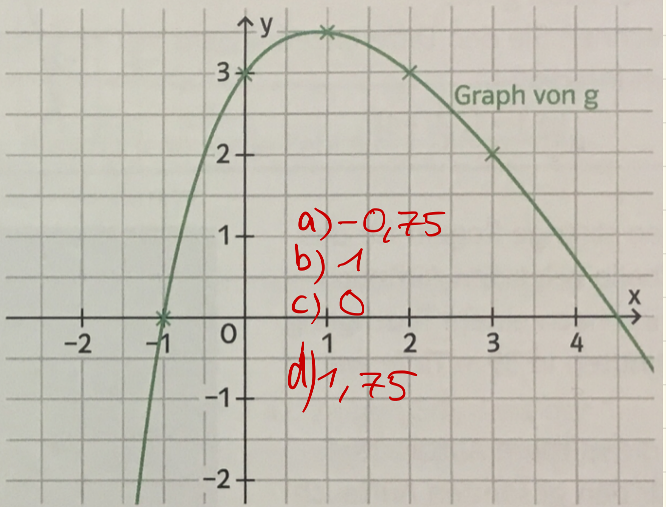
Der Differenzenquotient entspricht der Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$.

Die Gerade heißt <u>Sekante</u>

S.37

1 Gegeben sind die Graphen der beiden Funktionen f und g.





Bestimmen Sie den Differenzenquotienten von f im angegebenen Intervall. Verfahren Sie danach ebenso mit g.

a) $I = [1; 3]$ b) $I = [-1; 2]$ c) $I = [0; 2]$ d) $I = [-1; 1]$

2 Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall I.

S.37

a) $f(x) = x^2$
$I = [0; 2]$ 2

b) $f(x) = 3x^2$
$I = [-1; 3]$ 6

c) $f(x) = 2x^3$
$I = [-1; 1]$ 2

d) $f(x) = 3x^2 - 4$
$I = [1; 3]$ 12

e) $f(x) = 2x^2 - 3$
$I = [2; 4]$ 12

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$
$I = [-2; 1]$ −0,5

g) $f(x) = \sqrt{x}$
$I = [4; 9]$ 0,2

h) $f(x) = \frac{1}{x}$
$I = [-1; -0{,}5]$ −2

a)

$x_1 = -1$ $\quad$ $y_1 = f(x_1) = -2$

$x_2 = 1$ $\quad$ $y_2 = f(x_2) = 2$

$x_2 - x_1 = 2$ $\quad$ $y_2 - y_1 = 4$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{2} = 2$$

11.10.18

S.39

8 Die Funktion h beschreibt die Höhe eines Ballons in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Minuten nach dem Start, h(t) in Meter). Der Ballon fährt 6 min nach dem Start in 170 m Höhe. Im Zeitintervall zwischen 6 min und 8 min steigt der Ballon mit der mittleren Geschwindigkeit $40\,\frac{m}{min}$ senkrecht nach oben.

Ist die folgende Angabe richtig, falsch oder möglicherweise richtig?

a) $h(8) = 210$ b) $h(6) = 170$

c) $h(7) = 210$ d) $h(8) = 250$

e) $h(10) = 330$? f) $h(7) = 180$

t	0						6	7	8	9	10
h(t)	0						170	210	250		

S.39

10 Bestimmen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall I.

a) $f(x) = (x-2)^2$, $I = [1; 6]$ 3

b) $f(x) = \frac{9}{x^2} - 3$, $I = [-3; -1]$ 4

c) $f(x) = \sqrt{x+5} + x$, $I = [-4; -1]$ $4/3$

d) $f(x) = x^3 + x^2$, $I = [-2; 4]$ 14

$x_1 = -2$

$x_2 = 4$

$y_1 = f(x_1) = (-2)^3 + (-2)^2 = -4$

$y_2 = f(x_2) = 4^3 + 4^2 = 80$

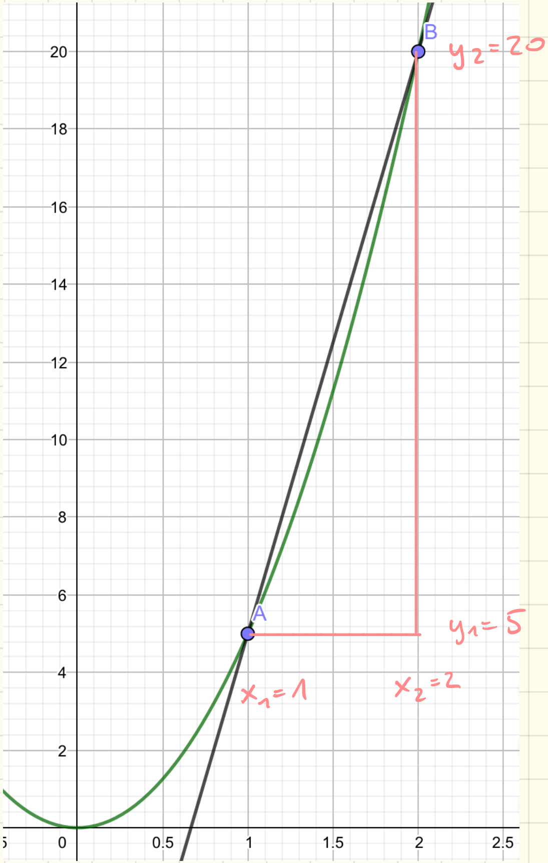
$x_2 - x_1 = 6$

$y_2 - y_1 = 84$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{84}{6} = 14$$

16.10.18

II.2 momentane Änderungsrate — Ableitung



Für einen fallenden Gegenstand gilt $s(t) = 5 \cdot t^2$

Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen $t_1 = 1s$ und $t_2 = 2s$?

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{20-5}{2-1} = 15$$

Diese durchschnittliche Geschwindigkeit liegt teilweise weit von der tatsächlichen Geschwindigkeit entfernt.

Uns interessiert die tatsächliche Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = 1s$.

Dazu nähern wir t_2 schrittweise an t_1 an:

1. Schritt: $t_1 = 1s$ $\quad s(t_1) = 5$

$t_2 = 1,5s$ $\quad s(t_2) = 11,25$

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = 12,5$$

2. Schritt: $t_1 = 1s$ $\quad s(t_1) = 5$

$t_2 = 1,1s$ $\quad s(t_2) = 6,05$

$$\frac{6,05 - 5}{1,1 - 1} = 10,5$$

3. Schritt: $t_1 = 1s$ $\quad s(t_1) = 5$

$t_2 = 1,01s$ $\quad s(t_2) = 5,1005$

$$\frac{5,1005 - 5}{1,01 - 1} = 10,05$$

4. Schritt: $t_1 = 1s$ $\quad s(t_1) = 5$

$t_2 = 1,001s$ $\quad s(t_2) = 5,010005$

$$\frac{5,010005 - 5}{1,001 - 1} = 10,005$$

Fazit: Verkleinert man den Abstand zwischen t_1 und t_2, so nähert sich der Wert (im Beispiel) immer weiter an die 10 an. Man spricht vom sogenannten <u>Grenzwert</u>.

Wir versuchen, diesen Grenzwert mathematisch zu berechnen:

$$\frac{s(t_2) - s(1)}{t_2 - 1} = \frac{5 \cdot t_2^2 - 5 \cdot 1^2}{t_2 - 1} = \frac{5(t_2^2 - 1^2)}{t_2 - 1} = \frac{5 \cdot (t_2 + 1) \cdot (t_2 - 1)}{(t_2 - 1)}$$

$$= 5 \cdot (t_2 + 1)$$

Hier in das umgeformte Ergebnis dürfen wir für t_2 direkt den Wert 1 einsetzen: $5 \cdot (1+1) = \underline{\underline{10}}$

Distributivgesetz:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b+c)$$

1. Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

18.10.18

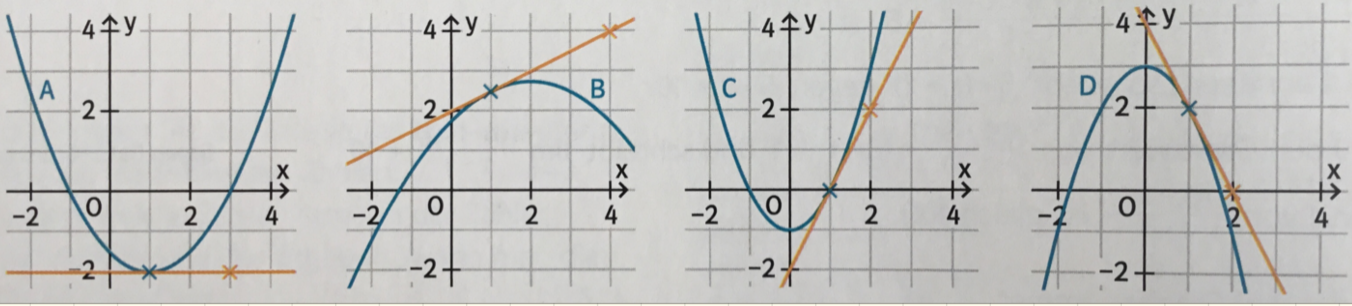
Definition: Strebt der Grenzwert des Differenzenquotienten gegen einen festen Wert, so nennen wir diesen die <u>Ableitung</u>. Diese gibt die Steigung an.

Schreibweise: Man schreibt $f'(x)$

S.42

1 Entscheiden Sie, zu welchem der Graphen A bis D die Ableitungen gehören.

(1) $f'(1) = 2$ (2) $f'(1) = -2$ (3) $f'(1) = 0{,}5$ (4) $f'(1) = 0$



$f'(1) = 0$ $f'(1) = 0{,}5$ $f'(1) = 2$ $f'(1) = -2$

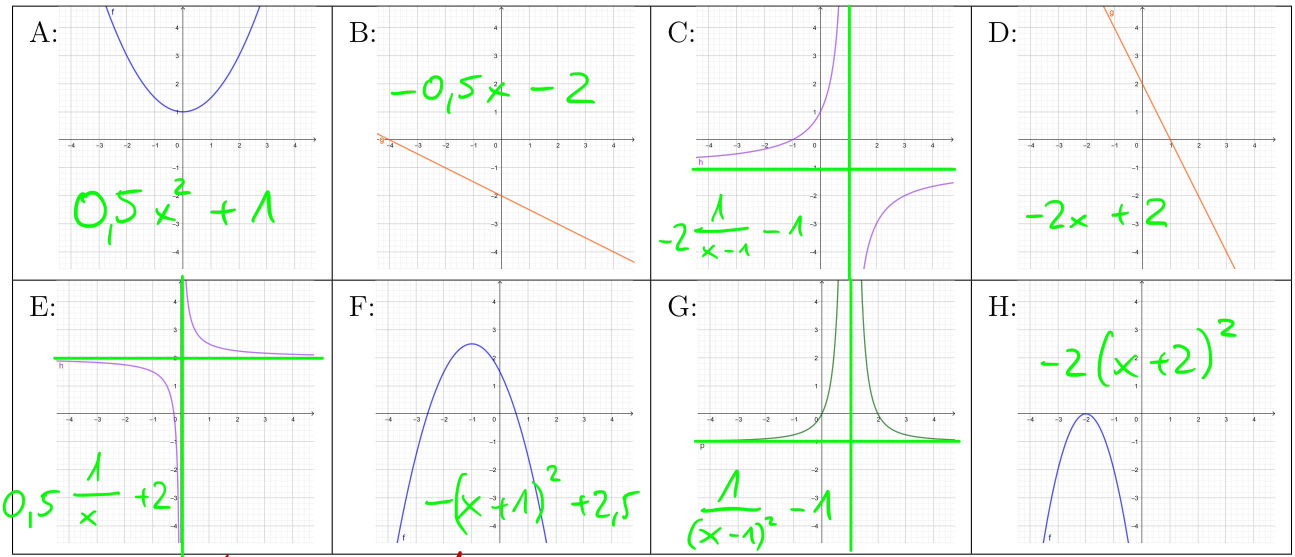
Themen KA: 6.11.

- Funktionsklassen zuordnen
- Verschieben und Strecken von Funktionen
- Differenzenquotient
- Ableitung

Übersicht zur 1. Klassenarbeit

1. Funktionsgleichungen bestimmen

Gib für jedes Schaubild die entsprechende Funktion an.



kein x^4, kein $1/x^3$!

2. Differenzenquotient berechnen

Bestimme den Wert des Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ im angegebenen Intervall.

$y_1=-4$, $y_2=-2$, $x_1=0$, $x_2=2$

a) $I = [0; 2]$ $\frac{y_2-y_1=2}{x_2-x_1=2}=1$

b) $I = [-1; 1]$ 0

$y_2=-2$ $y_1=-3{,}5$

c) $I = [-1; 2]$ 0,5

$y_2=-3{,}5$ $y_2=-2$

d) $I = [-2; 1]$ −0,5

3. Differenzenquotient berechnen

Bestimme mithilfe der Wertetabelle den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-82,5	−44	-19,5	-6	-0,5	0	-1,5	-2	1,5	12	32,5	66

a) $I = [0; 4]$

$y_1=0$ $y_2=12$
$x_1=0$ $x_2=4$
DQ = 3

b) $I = [-3; 3]$

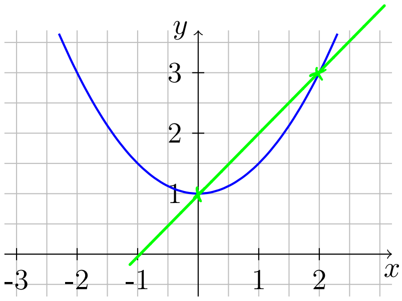
$y_1=-19{,}5$ $y_2=1{,}5$
$x_1=-3$ $x_2=3$
DQ = 3,5

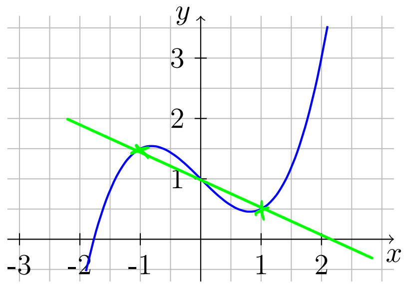
c) $I = [-5; 6]$

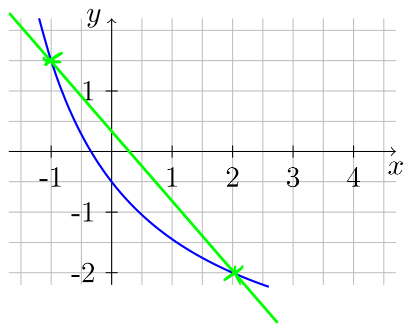
$y_1=-82{,}5$ $y_2=66$
$x_1=-5$ $x_2=6$
DQ = 13,5

4. Differenzenquotient bestimmen

Bestimme mithilfe der Graphen den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.







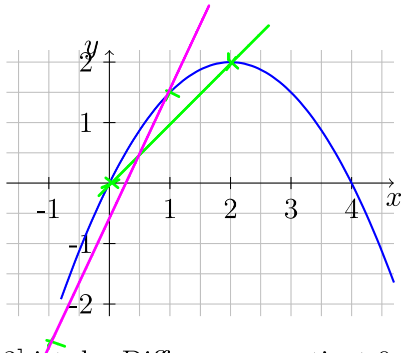
a) $I = [0; 2]$ DQ = 1

b) $I = [-1; 1]$ DQ = − 0,5

c) $I = [-1; 2]$ DQ = $-\frac{3,5}{3}$

5. Wahr oder falsch

Das Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f. Bestimme, ob die Aussagen zum Differenzenquotienten von f wahr oder falsch sind:



a) Im Intervall $[0; 2]$ ist der Differenzenquotient 1. ✓

b) Im Intervall $[0; 3]$ ist der Differenzenquotient 1,5. f

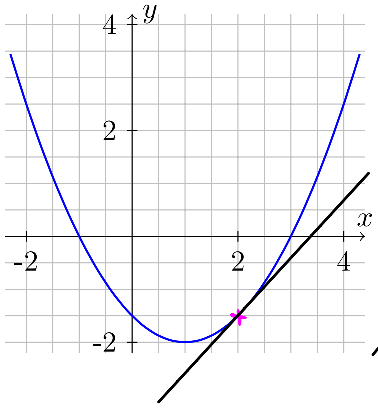
c) Im Intervall $[1; 3]$ ist der Differenzenquotient 0. ✓

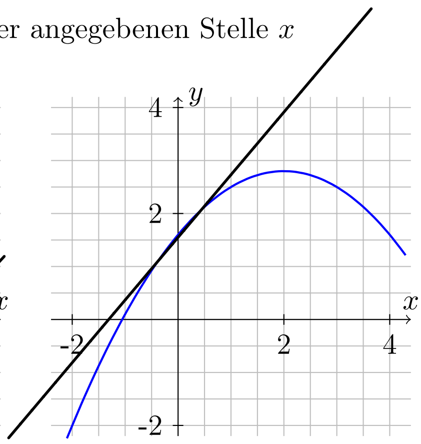
d) Im Intervall $[0; 4]$ ist der Differenzenquotient positiv. f

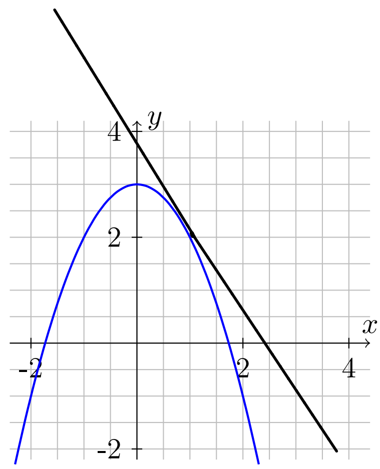
e) Im Intervall $[-1; 1]$ ist der Differenzenquotient kleiner als im Intervall $[0; 2]$ f

6. Ableitung

Bestimme die Ableitung an der angegebenen Stelle x







a) $x = 2$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

8.11.18

Wir wollen nun die Ableitung an der Stelle $t_1 = 2$ berechnen:

$s(t) = 5 \cdot t^2$

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(2)}{t_2 - 2}$$

$$=$$

4 Es ist $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie rechnerisch die Ableitung von f an der Stelle

a) 3, b) 4, c) 5, d) −1.

$f'(3) = 6$ $f'(4) = 8$ $f'(5) = 10$ $f'(-1) = -2$

$f(x) = x^2$

a) $$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_2^2 - 3^2}{(t_2 - 3)}$$

$$= \frac{(t_2 + 3)\cdot\cancel{(t_2 - 3)}}{\cancel{(t_2 - 3)}} = t_2 + 3$$

$\Rightarrow f'(3) = 6$

$$f(x) = x^2$$

$$f(3) = 3^2$$

$$f(17) = 17^2$$

$$f(t_2) = t_2^2$$

$$g(x) = x^3 - 5 \cdot x^2$$

$$g(3) = (3)^3 - 5 \cdot (3)^2$$

$$g(a) = (a)^3 - 5 \cdot (a)^2$$

$$g(a-5) = (a-5)^3 - 5 \cdot (a-5)^2$$

$$g(-7) = (-7)^3 - 5 \cdot (-7)^2$$

$f(x) = 5 \cdot x^2$

$f'(1) = 10$

$f'(7) = 70$

$f(x) = x^2$

$f'(1) = 2$

$f'(7) = 14$

$f(x) = 9 \cdot x^2$

$f'(2) = 36$

S. 43 $\quad f(x) = 3 \cdot x^2 \qquad f'(2) = 12$

13.11.18

9 a) Es ist f(x) = $3x^2 - 2$. Bestimmen Sie rechnerisch f′(2).

b) Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = $5x^2 + 4$. Ermitteln Sie f′(1).

$$f'(2) = \frac{f(t_2) - f(2)}{t_2 - 2}$$

$$f(t_2) = 3 \cdot t_2^2 - 2$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2$$

$$= \frac{(3 \cdot t_2^2 - 2) - (3 \cdot 2^2 - 2)}{t_2 - 2} = \frac{+3 \cdot t_2^2 - 3 \cdot 2^2}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{3 \cdot (t_2^2 - 2^2)}{t_2 - 2} = \frac{3 \cdot (t_2 - 2) \cdot (t_2 + 2)}{t_2 - 2} = 3 \cdot (t_2 + 2)$$

$$f'(2) = 3 \cdot (2 + 2) = 12$$

9 a) Es ist $f(x) = 3x^2 - 2$. Bestimmen Sie rechnerisch $f'(2)$.

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x^2 + 4$. Ermitteln Sie $f'(1)$.

c) $f(x) = 4x$, bestimme $f'(3)$

$$f(t_2) = 5 \cdot t_2^2 + 4$$
$$f(1) = 5 \cdot 1^2 + 4$$

b) $$f'(1) = \frac{f(t_2) - f(1)}{t_2 - 1}$$

$$= \frac{5t_2^2 + 4 - (5 \cdot 1^2 + 4)}{t_2 - 1} = \frac{5t_2^2 \cancel{+4} - 5 \cdot 1^2 \cancel{-4}}{t_2 - 1}$$

$$= \frac{5 \cdot (t_2^2 - 1^2)}{t_2 - 1} = \frac{5\cancel{(t_2 - 1)}(t_2 + 1)}{\cancel{t_2 - 1}} = 5(t_2 + 1)$$

$$f'(1) = 5(1+1) = 10$$

9 a) Es ist $f(x) = 3x^2 - 2$. Bestimmen Sie rechnerisch $f'(2)$.

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x^2 + 4$. Ermitteln Sie $f'(1)$.

c) $f(x) = 4x$, bestimme $f'(3)$

c) $$f'(3) = \frac{f(t_2) - f(3)}{t_2 - 3}$$

$$f(t_2) = 4 \cdot t_2$$

$$f(3) = 4 \cdot 3$$

$$= \frac{4 \cdot t_2 - 4 \cdot 3}{t_2 - 3} = \frac{4 \cdot \cancel{(t_2 - 3)}}{\cancel{t_2 - 3}} = 4$$

$$f'(3) = 4$$

II. 3 Ableitungsregeln

Wir haben folgende Regeln herausgefunden:

1. Bei einer quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ ist die Ableitung an einer Stelle t
   $f'(t) = 2 \cdot t$
2. Mit einem konstanten Vorfaktor $f(x) = a \cdot x^2$ gilt
   $f'(t) = 2 \cdot a \cdot t$
3. Bei einer linearen Funktion $f(x) = a \cdot x$ gilt
   $f'(t) = a$

4. Wird eine Funktion nach oben / unten verschoben, so ändert sich die Ableitung nicht, d.h. von den Funktionen $f(x) = 5x^2$ und $g(x) = 5x^2 - 9$ ist die Ableitung identisch.

Beispiele: $f(x) = 3 \cdot x^2 + 4$ $\quad f'(2) = 12$

$f(x) = -7 \cdot x^2 - 3$ $\quad f'(1) = -14$

$f(x) = -5x + 2$ $\quad f'(17) = -5$

$f(x) = 2 \cdot x^2 - 3x$ $\quad f'(1) = 4 - 3 = 1$

$f(x) = 2 \cdot x^2$ $\quad f'(1) = 4$

$f(x) = -3x$ $\quad f'(1) = -3$

15.11.18

5. Haben wir eine Funktion, die aus einer Summe oder Differenz besteht, so bilden wir die Ableitung von den einzelnen Summanden, z.B. $f(x) = 3x^2 + 5x$,

$$f'(2) = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 5 = 17$$

6. Bei einer Funktion mit einer höheren Potenz/Exponent $f(x) = x^n$ gilt für die Ableitung an der Stelle t:

$$f'(t) = n \cdot t^{n-1}$$ Beispiel: $f(x) = x^3$ $f'(5) = 3 \cdot 5^2 = 75$

Beispiele:

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(t) = 2 \cdot t^1$$

$$f(x) = x^1 \longrightarrow f'(t) = 1 \cdot \underbrace{t^0}_{1}$$

$$f(x) = 3 \cdot x^7 \longrightarrow f'(t) = 7 \cdot 3 \cdot t^6$$

$$f(x) = 4x^2 - 3x^1 \longrightarrow f'(t) = 2 \cdot 4 \cdot t - 3\cancel{t^0}$$

$$f(x) = 2 \cdot x^{-3} \longrightarrow f'(t) = -3 \cdot 2 \cdot t^{-4}$$

$$f(x) = \frac{5}{x^2} = 5 \cdot x^{-2} \longrightarrow f'(t) = -2 \cdot 5 \cdot t^{-3}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(t) = \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

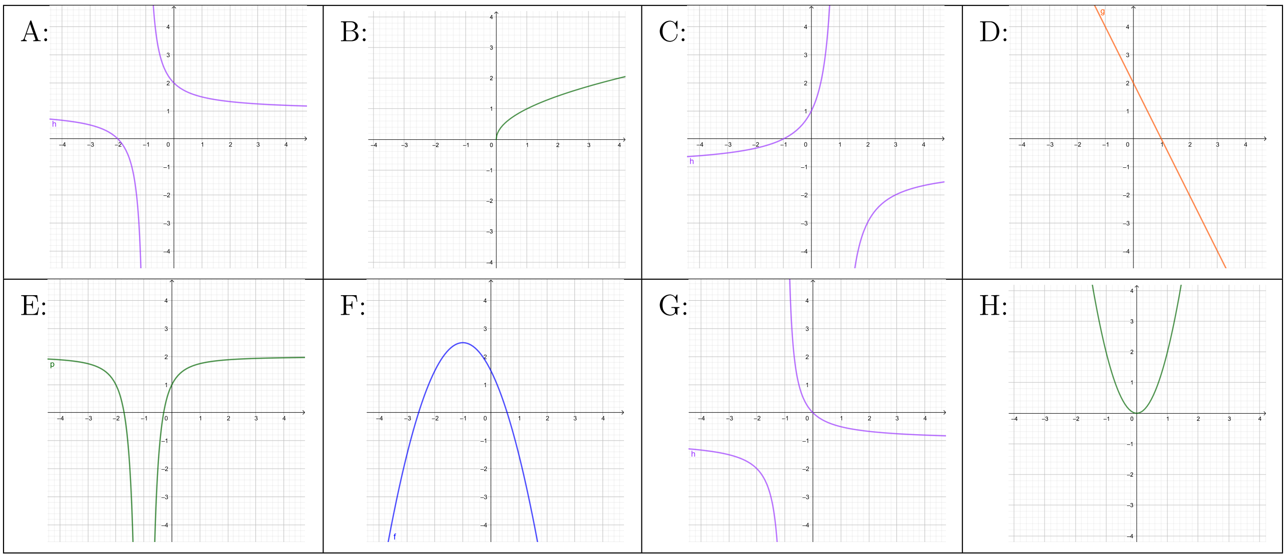
$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}}$$

1. Klassenarbeit, 6.11.2018

Name: ______________ Punkte: ______/26P Note: ______ mündlich: ______

1. Funktionsgleichungen bestimmen (8P)

Gib für jedes Schaubild die entsprechende Funktion an.



2. Differenzenquotient berechnen (4P)

Bestimme den Wert des Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ im angegebenen Intervall.

$2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 1$

a) $I = [0; 2]$ b) $I = [-1; 1]$ c) $I = [-1; 2]$ d) $I = [-2; 1]$

3. Differenzenquotient berechnen (3P)

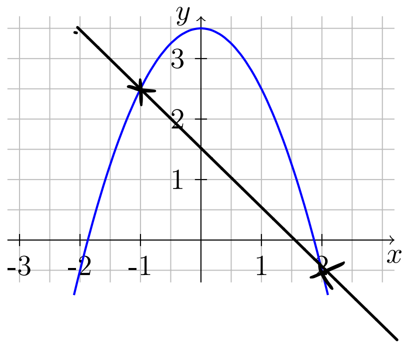
Bestimme mithilfe der Wertetabelle den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	73	56	21	13	1	-4	-6	2	9	-3	-8	-15

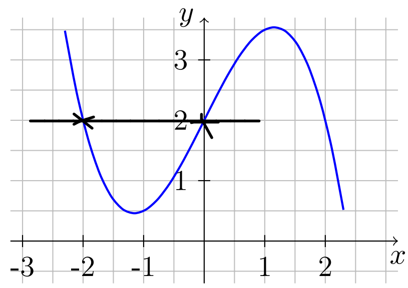
a) $I = [0; 4]$ b) $I = [-3; 3]$ c) $I = [-5; 6]$

4. Differenzenquotient bestimmen (3P)

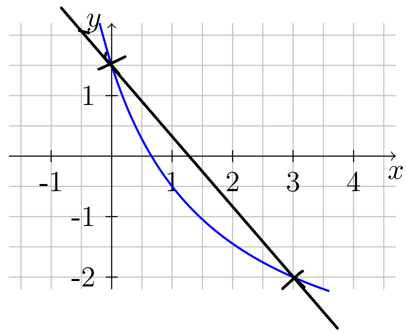
Bestimme mithilfe der Graphen den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.



a) $I = [-1; 2]$



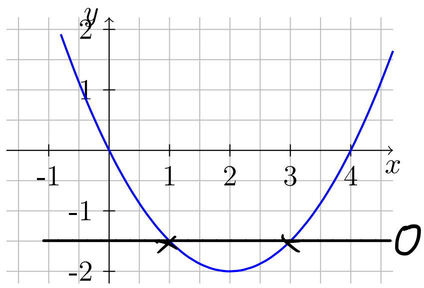
b) $I = [-2; 0]$



c) $I = [0; 3]$

5. Wahr oder falsch (5P)

Das Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f. Bestimme, ob die Aussagen zum Differenzenquotienten (DQ) von f wahr oder falsch sind:



a) Im Intervall $[2; 3]$ ist der DQ 1.

c) Im Intervall $[0; 4]$ ist der DQ 0.

b) Im Intervall $[0; 3]$ ist der DQ -1,5.

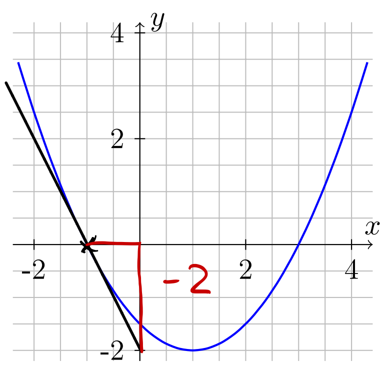
d) Im Intervall $[1; 3]$ ist der DQ negativ.

e) Im Intervall $[-0.5; 3]$ ist der DQ kleiner als im Intervall $[0; 2]$

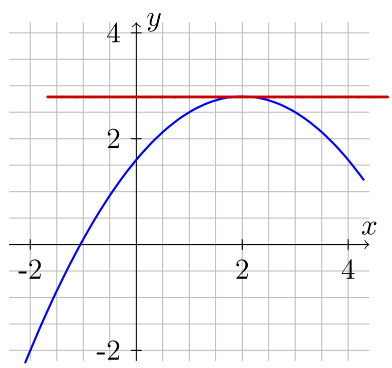
−0,71 −1

6. Ableitung (3P)

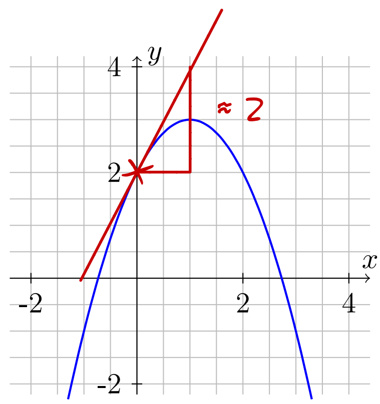
Bestimme die (ungefähre) Ableitung an der angegebenen Stelle x



a) $x = -1$



b) $x = 2$



c) $x = 0$

S.52 | 16.11.18

1 Bestimmen Sie $f'(x)$ für f mit

a) $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4 \cdot x^3$ b) $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$ c) $f(x) = x^6$, $f'(x) = 6x^5$ d) $f(x) = x^9$, $f'(x) = 9x^8$

e) $f(x) = x^8$, $f'(x) = 8x^7$ f) $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$ g) $f(x) = x^{11}$, $f'(x) = 11x^{10}$ h) $f(x) = x^{101}$. $f'(x) = 101x^{100}$

2 Wie groß ist die Steigung des Graphen von f im gegebenen Punkt A?

a) $f(x) = x^2$, $A(3|9)$ b) $f(x) = x^3$, $A(2|8)$ c) $f(x) = x^9$, $A(1|1)$ d) $f(x) = x^{20}$, $A(-1|1)$

$f'(x) = 2x$ $f'(3) = 6$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(2) = 12$ $f'(x) = 9x^8$ $f'(1) = 9$ $f'(x) = 20x^{19}$ $f'(-1) = -20$

3 Es ist $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Schreiben Sie den Funktionsterm entsprechend um und leiten Sie ab.

a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^{30}}$

$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$ $f'(x) = -3 \cdot x^{-4}$ $f'(x) = -4 \cdot x^{-5}$ $f'(x) = -30 \cdot x^{-31}$

1 Bestimmen Sie die Ableitung f′.

f(x)	x^3	x^5	x^{12}	x^{15}	x^{20}
f′(x)	$3\cdot x^2$	$5\cdot x^4$	$12x^{11}$	$15x^{14}$	$20x^{19}$

f(x)	x^{-3}	x^{-5}	x^{-12}	x^{-15}	x^{-20}
f′(x)	$-3x^{-4}$	$-5x^{-6}$	$-12x^{-13}$	$-15x^{-16}$	$-20x^{-21}$

f(x)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{1}{x^6} = x^{-6}$	$\frac{1}{x^8} = x^{-8}$
f′(x)	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$-6x^{-7} = -6\cdot\frac{1}{x^7}$	$-8x^{-9} = -8\cdot\frac{1}{x^9}$

2 Geben Sie in der Tabelle an, ob richtig (r) oder falsch (f) abgeleitet wurde. Korrigieren Sie die Fehler gegebenenfalls in der letzten Spalte.

f(x)	f′(x)	r / f	Korrektur
x^8	$8x^7$	✓	
x^{16}	$16x^{17}$	f	$16x^{15}$
x^{-4}	$-4x^{-3}$	f	$-4x^{-5}$
x^1 $f'(x)=1\cdot x^0$	1	✓	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}$	f	$\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4$. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x) =$ ______.

a) Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt A(2|16).

b) Berechnen Sie die Stelle, an der die Ableitung der Funktion f den Wert −4 annimmt.

c) Bestimmen Sie den Punkt des Graphen von f, in dem die Tangente an den Graphen parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 8x$ verläuft. [T1]

4 Leiten Sie ab.

a) $f(a) = a^3$; $f'(a) =$ ______
b) $g(b) = b^{10}$; $g'(b) =$ ______
c) $h(c) = c$; $h'(c) =$ ______

d) $k(r) = r^{-1}$; $k'(r) =$ ______
e) $l(s) = \frac{1}{s^7}$; $l'(s) =$ ______
f) $m(t) = \sqrt{t}$; $m'(t) =$ ______

g) $f(x) = x^n$; $f'(x) =$ ______
h) $f(x) = x^{b-1}$; $f'(x) =$ ______
i) $f(x) = x^{2-2k}$; $f'(x) =$ ______

5 Gegeben sind die beiden Funktionen f mit $f(x) = x^3$ und g mit $g(x) = x^4$. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen der Graph von f dieselbe Steigung hat wie der Graph von g. Geben Sie auch die zugehörigen Punkte auf den Graphen von f und g an sowie die Steigung der Tangenten in diesen Punkten.

$f'(x) =$ ______ und $g'(x) =$ ______ Gleichsetzen der Ableitungen und Auflösen nach x:

An den Stellen $x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____ haben die Graphen von f und g dieselbe Steigung. Für $x_1 =$ ___: Im Punkt ______ sind die Tangenten an die Graphen von f und g parallel mit der Steigung ___.

Für $x_2 =$ ___: In den Punkten ______ und ______ sind die Tangenten parallel mit der Steigung ___

[T1] Die Gerade $y = 8x$ hat in jedem Punkt die Steigung 8.

$$f(x) = x^0$$

$$f'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

1 Leiten Sie die Funktion f zweimal ab.

a) $f(x) = 4x^2$

$f'(x) =$ $4 \cdot 2 \cdot x = 8x$

$f''(x) =$ $8 \cdot 1 \cdot x^0 = 8$

b) $f(x) = 2x^{-2}$

$f'(x) =$ $-4 \cdot x^{-3}$

$f''(x) =$ $12 \cdot x^{-4}$

c) $f(x) = 2x^6 + x^3$

$f'(x) =$ $12 \cdot x^5 + 3 \cdot x^2$

$f''(x) =$ $60 \cdot x^4 + 6 \cdot x^1$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^{-4}$

$f'(x) =$ $x^3 + 4 \cdot x^{-5}$

$f''(x) =$ $3 \cdot x^2 - 20 \cdot x^{-6}$

e) $f(x) = 0{,}5x^5 - 2x^3$

$f'(x) =$ $2{,}5 \cdot x^4 - 6 \cdot x^2$

$f''(x) =$ $10 \cdot x^3 - 12 \cdot x^1$

f) $f(x) = \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) =$ $-16 \cdot x^{-5} - 2x^{-3}$

$f''(x) =$ $80 \cdot x^{-6} + 6 \cdot x^{-4}$

2 Kim hat Ableitungen gebildet. Kontrollieren Sie die Ableitungen (r für richtig und f für falsch) und verbessern Sie gegebenenfalls. Beschreiben Sie auch, worin der Fehler besteht.

	Funktion f	Ableitung	Kontrolle und Verbesserung	Fehlerbeschreibung
a)	$f(x) = x^3 + 3x$	$f'(x) = 3x^2 + \cancel{3x}$	f $\quad f'(x) = 3x^2$	2. Summand wurde nicht abgeleitet.
b)	$f(x) = x \cdot (1 - 3x)$	$f'(x) = -3$	f $\quad f'(x) = 1 - 6x$	
c)	$f(x) = x^2 + x$	$f'(x) = 2x + 1$	✓	
d)	$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x$	$f'(x) = \frac{1}{3}x - 4$	f $\quad f'(x) = \frac{4}{3}x - 4$	
e)	$f(t) = tx^2$	$f'(t) = 2tx$	✓	

3 Wandeln Sie den Funktionsterm von f um. Geben Sie dann den Grad von f und den Grad der Ableitungsfunktion f' an. Bestimmen Sie f'(x).

a) $f(x) = x^2 \cdot (x - 2)$

= ____________

= ____________

Grad von f: ___; Grad von f': ___

$f'(x) =$ ____________

b) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot 5$

= ____________

= ____________

Grad von f: ___; Grad von f': ___

$f'(x) =$ ____________

c) $f(x) = 4 \cdot (x^4 + 3) \cdot x^2$

= ____________

= ____________

Grad von f: ___; Grad von f': ___

$f'(x) =$ ____________

4 Die Tangente an die Parabel der Funktion f mit $f(x) = 1{,}5x^2$ im Punkt P soll die Steigung m haben. Bestimmen Sie den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$.

a) $m = 6$

$f'(x) =$ ________, also muss die Gleichung ________ $= 6$ gelten.

Damit erhält man $x_0 =$ ________

und P(____ | ____).

b) $m = 1{,}5$

c) $m = -2$

5 Verbinden Sie zusammengehörende Karten.

$f(x) = x^2 + tx$ | $f(x) = tx^2 + tx$ | $f(x) = x^2 - t^2x$ | $f(t) = tx^2 + tx$ | $f(t) = x^2 - t^2x$ | $f(t) = tx^2 - t^2x$

$f'(t) = -2tx$ | $f'(t) = x^2 - 2tx$ | $f'(t) = x^2 + x$ | $f'(x) = 2x + t$ | $f'(x) = 2x - t^2$ | $f'(x) = 2tx + t$

$$f(x) = 30 \cdot a \cdot x^5$$

$$f'(x) = 30 \cdot a \cdot 5 \cdot x^4$$

$$f''(x) = 30 \cdot a \cdot 5 \cdot 4 \cdot x^3$$

$$f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x^2} = 5 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 5 \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$

$$f''(x) = 5 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4}$$

ca. 24 Punkte für 1

Kurztest: Ableitungen - A

Name: ______________________ Punkte: __________/28P Note: __________

1. Bestimme die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$

Hinweis: a steht für eine beliebige Zahl!

a) $f(x) = 3x^4$

$f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^3 = 12x^3$

$f''(x) = 36x^2$

b) $f(x) = 2x^2 - 5x^3$

$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot x - 5 \cdot 3 \cdot x^2 = 4x - 15x^2$

$f''(x) = 4x^0 - 15 \cdot 2x^1 = 4 - 30x$

c) $f(x) = 2x^5 - 3 \cdot a \cdot x^3$

$f'(x) = 5 \cdot 2 \cdot x^4 - 3 \cdot a \cdot 3x^2 = 10x^4 - 9 \cdot a \cdot x^2$

$f''(x) = 10 \cdot 4 \cdot x^3 - 9 \cdot a \cdot 2 \cdot x^1 = 40x^3 - 18x$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-3/2} = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/2}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} = 1 \cdot x^{-2}$

$f'(x) = 1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -2 \cdot x^{-3}$

$f''(x) = (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} = 6x^{-4}$

f) $f(x) = 9x^4 - 4x^2 - 8$

$f'(x) = 9 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 2 \cdot x^1 = 36x^3 - 8x$

$f''(x) = 36 \cdot 3 \cdot x^2 - 8 \cdot 1 \cdot x^0 = 108x^2 - 8$

g) $f(x) = 5\sqrt{x} = 5 \cdot x^{1/2}$

$f'(x) = 5 \cdot 1/2 \cdot x^{-1/2} = 2{,}5 \cdot x^{-1/2}$

$f''(x) = 2{,}5 \cdot (-1/2) \cdot x^{-1{,}5} = -1{,}25x^{-1{,}5}$

h) $f(x) = \frac{3}{x^5} = 3 \cdot x^{-5}$

$f'(x) = 3 \cdot (-5) \cdot x^{-6} = -15\, x^{-6}$

$f''(x) = (-15) \cdot (-6) \cdot x^{-7} = 90\, x^{-7}$

i) $f(x) = x^2 \cdot (x+2)$

$= x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$f''(x) = 6x + 4$

j) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-4} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{x^2}}$ x^{-2}

$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot (-4) \cdot x^{-5} + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -3x^{-5} - x^{-3}$

$f''(x) = (-3) \cdot (-5) \cdot x^{-6} - (-3)\, x^{-4} = 15x^{-6} + 3x^{-4}$

k) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^6 - 2\sqrt{x} + 4$

$\frac{2}{3} \cdot x^6 - 2 \cdot x^{1/2} + 4$

$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 6\, x^5 - 2 \cdot \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = 4x^5 - x^{-1/2}$

$f''(x) = 20\, x^4 + 0{,}5\, x^{-1{,}5}$

l) $f(x) = 6 \cdot a \cdot x^2 + a$

$f'(x) = 6 \cdot a \cdot 2 \cdot x^1 = 12 \cdot a \cdot x$

$f''(x) = 12a$

m) $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^{-4}}$

$= 4x^{-2} + 3x^4$

$f'(x) = -8x^{-3} + 12x^3$

$f''(x) = 24x^{-4} + 36x^2$

n) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$

$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2}$

$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{3}{4}\, x^{-1/2}$

27.11.2018

II.4 Tangente

Eine Tangente an einer Funktion

- berührt diese an einem Punkt P
- ist eine lineare Funktion mit der Gleichung

$$y = m \cdot x + c$$

Steigung

Verschiebung nach oben/unten

- hat als Steigung die selbe wie die Funktion am Punkt P → Ableitung

Beispiel: $f(x) = x^2$, wir suchen die Tangente am Punkt $P(2|4)$

$y = m \cdot x + c$

Schritt 1: wir berechnen die Steigung m:

$f'(x) = 2x$

→ x-Wert einsetzen

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 = m$

$y = 4 \cdot x + c$

Schritt 2: Um den y-Achsenabschnitt c auszurechnen, setzen wir den Punkt P in die Tangentengleichung ein:

$y = 4 \cdot x + c$

$4 = 4 \cdot 2 + c \quad | -8$

$-4 = c$

Ergebnis: Die Tangente hat die Gleichung $y = 4x - 4$

S.59

3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt B(b|f(b)).

a) $f(x) = x^2$, b = 2 $B(2|4)$ b) $f(x) = 2x^2 - 3x$, b = 1 $B(1|-1)$ c) $f(x) = \frac{8}{3}x^3$, $b = \frac{1}{2}$ $B(\frac{1}{2}|\frac{1}{3})$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2$, b = 2 e) $f(x) = 3x^4 + 4x$, b = −1 f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b = −2

x y

Lösungen zu Aufgabe 3:

$y = x - 2$	E
$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$	T
$y = -8x - 9$	A
$y = 4x - 4$	F
$y = 2x - \frac{2}{3}$	R
$y = 4x - 8$	M

b) $f'(x) = 4x - 3$

$f'(1) = 4 - 3 = 1 = m$

$y = 1 \cdot x + c$

$-1 = 1 + c \quad | -1$

$-2 = c$

$\Rightarrow y = 1 \cdot x - 2$

c) $y = 2x - \frac{2}{3}$

d) $y = 4x - 8$

e) $y = -8x - 9$

f) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Lösungswort: FERMAT

c) $f(x) = \frac{8}{3} x^3$ $\qquad b = 1/2 \qquad B(1/2 \mid 1/3)$

$f'(x) = 3 \cdot \frac{8}{3} \cdot x^2 = 8x^2$

$f'(1/2) = 8 \cdot (1/2)^2 = 8 \cdot 1/4 = 2 = m$

$y = 2 \cdot x + c$

$1/3 = \underbrace{2 \cdot 1/2} + c$

$1/3 = 1 + c \quad | -1$

$-2/3 = c$

$y = 2 \cdot x - 2/3$

1 Der Graph der Funktion f hat im Punkt P die Tangente t. Markieren Sie zusammengehörende Karten.

$f'(0) = 2$ — $x=0$

$P(1|0,5)$

$t(x) = -x + 0,5$ — $m = -1$

$f'(1) = -1$ — $x=1$

$P(0|2)$

$t(x) = x - 0,5$ — $m = 1$

$f'(0) = 0$ — $x=0$

$t(x) = 2$ — $m = 0$

$P(0|0)$

$f'(1) = 1$ — $x=1$

$P(1|-0,5)$

$t(x) = 2x$ — $m=2$

2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(b|f(b))$.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x,\ b = 2$

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = m \cdot x + c$.

Ableiten der Funktion f ergibt $f'(x) = 4x - 3$.

Für die Steigung der Tangente gilt: $m = f'(2) = 5$.

Den y-Achsenabschnitt der Tangente erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von $P(2|2)$:

$y = 5 \cdot x + c$

$2 = 5 \cdot 2 + c \quad | -10$

$-8 = c$

Die Tangente hat die Gleichung $y = 5x - 8$.

b) $f(x) = 0,5 \cdot x^3 - 1,\ b = 1$

$f'(x) = 0,5 \cdot 3 \cdot x^2$

$f'(1) = 1,5 \ (= m)$

$y = 1,5 \cdot x + c$

$y = 1,5 \cdot 1 + c$

$-0,5 = 1,5 \cdot 1 + c \quad | - 1,5$

$-2 = c$

$y = 1,5 \cdot x - 2$

Die Tangente hat die Gleichung $y = 1,5x - 2$.

S59 A4

4.12.
~~30.11.~~2018

In welchem Punkt schneidet die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt B die x-Achse?

a) $f(x) = 0{,}5x^2$, $B(2|f(2))$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$, $B(-1|f(-1))$ c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $B(-1|f(-1))$

a) $f'(x) = x$

$y = f(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 = 2$ $B(2|2)$

(y-Wert bekommt man raus, indem man den x-Wert in die ursprüngliche Funktion einsetzt)

$m = f'(2) = 2$

(Steigung bekommt man, wenn man den x-Wert in die Ableitung einsetzt)

Tangente: $y = m \cdot x + c$

wir setzen alles ein:

$2 = 2 \cdot 2 + c \quad | -4$

$-2 = c$

Endergebnis Tangente:

$y = 2 \cdot x - 2$

Schnittpunkt mit x-Achse ($y=0$)

$0 = 2 \cdot x - 2 \quad | -2x$

löse nach x auf:

$-2x = -2 \quad | : (-2)$

$x = 1$

Schnittpunkt: $S(1|0)$

In welchem Punkt schneidet die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt B die x-Achse?

a) $f(x) = 0{,}5x^2,\ B(2|f(2))$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2,\ B(-1|f(-1))$ c) $f(x) = \frac{3}{x}\ B(-1|f(-1))$

b) $y = f(-1) = \frac{5}{3} = 1{,}67$

$f'(x) = x^2 + 4x$

$m = f'(-1) = -3$

Tangente: $y = m \cdot x + c$

$\frac{5}{3} = (-3)\cdot(-1) + c \quad | -3$

$-\frac{4}{3} = c$

Tangente: $y = -3x - \frac{4}{3}$

Schnittpunkt $0 = -3x - \frac{4}{3} \quad | + \frac{4}{3}$

$4/3 = -3x \quad |:(-3)$

$-4/9 = x = -0{,}44$

$S(-0{,}44|0)$

$f(x) = 3 \cdot x^{-1}$

c) $y = f(-1) = -3$

$f'(x) = -3 \cdot x^{-2}$

$m = f'(-1) = -3$

Tangente: $y = m \cdot x + c$

$-3 = (-3)\cdot(-1) + c \quad | -3$

$-6 = c$

Tangente: $y = -3x - 6$

Schnittpunkt: $0 = -3x - 6 \quad | + 6$

$6 = -3x \quad |:(-3)$

$-2 = x$

$S(-2|0)$

3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt P.

a) $f(x) = x^2 + x$; $P(1 | f(1))$; $f'(x) = 2 \cdot x + 1$

t: $y = m \cdot x + c$ mit $m = f'(1) = 3$

Einsetzen der Koordinaten von $P(1 | 2)$:

$y = m \cdot x + c$

$2 = 3 \cdot 1 + c \quad | -3$

$-1 = c$

Ergebnis: t: $y = 3x - 1$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$; P(4 | f(4 [redacted])); $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$P(4 | 5)$

$f'(4) = 0{,}5 = m$

$5 = 0{,}5 \cdot 4 + c \quad | -2$

$3 = c$

Ergebnis: t: $y = 0{,}5x + 3$

HA: Nr 2

2 Die Tangente an die Parabel der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 - x$ soll die Steigung m haben.

Es ist $f'(x) = 4x - 1$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P.

a) $m = 3$

$x_1 = 1$; $y_1 = 1$

P(1 | 1)

b) $m = -1$

$x_1 = 0$; $y_1 = 0$

P(0 | 0)

c) $m = 5$

$x_1 = 1{,}5$; $y_1 = 3$

P(1,5 | 3)

a)

$$4 \cdot x - 1 = 3 \quad | +1$$
$$4x = 4 \quad | :4$$
$$x = 1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

b)

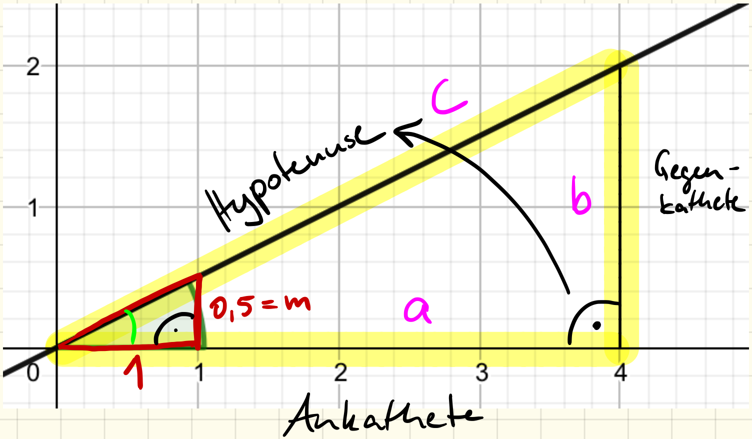
$$4x - 1 = -1 \quad | +1$$
$$4x = 0$$
$$x = 0$$

c)

$$4x - 1 = 5 \quad | +1$$
$$4x = 6 \quad | :4$$
$$x = 1{,}5$$

$$f(1{,}5) = 2 \cdot (1{,}5)^2 - (1{,}5)$$

Wiederholung: Winkelberechnungen



sin	cos	tan	(cot)
$\frac{G}{H}$	$\frac{A}{H}$	$\frac{G}{A}$	$\frac{A}{G}$

$a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras)

$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$

$\cos(\alpha) = A/H$

$\tan(\alpha) = G/A$

$\tan(\alpha) = \frac{0{,}5}{1} = \frac{m}{1} = m = 0{,}5$

$\alpha = \tan^{-1}(0{,}5) = 27°$

m

7.12.18

S59 A8

Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Tangente an den Graphen von f im Punkt B.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$, $B(0{,}5 \mid f(0{,}5))$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$, $B(1{,}5 \mid f(1{,}5))$

c) $f(x) = -x^2 + x$, $B(1 \mid f(1))$

d) $f(x) = -x^4 - 2x^3$, $B(1 \mid f(1))$

$$\tan^{-1}(m) = \alpha$$

$$m = \tan(\alpha)$$

a) $m = 0{,}25$ $\quad \alpha = 14^\circ$

b) $m = 1{,}5$ $\quad \alpha = 56{,}3^\circ$

c) $m = -1$ $\quad \alpha = -45^\circ$

d) $m = -10$ $\quad \alpha = -84{,}3^\circ$

S.58 A9

9 In welchen Punkten des Graphen von f hat die Tangente den Steigungswinkel 21,8°?

a) $f(x) = 5x^2$ b) $f(x) = -\frac{40}{x} = -40x^{-1}$ c) $f(x) = \frac{5}{6}x^3$ d) $f(x) = 0{,}15x^2 - 0{,}2x$

$f'(x) = 10x = m$ $f'(x) = 40x^{-2} = \frac{40}{x^2}$

$m = \tan(\alpha) = \tan(21{,}8°) = 0{,}4$

a)

$10x = 0{,}4 \quad | :10$

$x = 0{,}04$

$y = 5 \cdot 0{,}04^2 = 0{,}008$

$P(0{,}04 \mid 0{,}008)$

b)

$\frac{40}{x^2} = 0{,}4 \quad | \cdot x^2$

$40 = 0{,}4x^2 \quad | :0{,}4$

$100 = x^2 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = 10$

$x_2 = -10$

$P_1(10 \mid -4)$

$P_2(-10 \mid 4)$

c) 2,5x^2=0,4

x^2=0,16

x=±0,4

P1(-0,4 | -0,053)

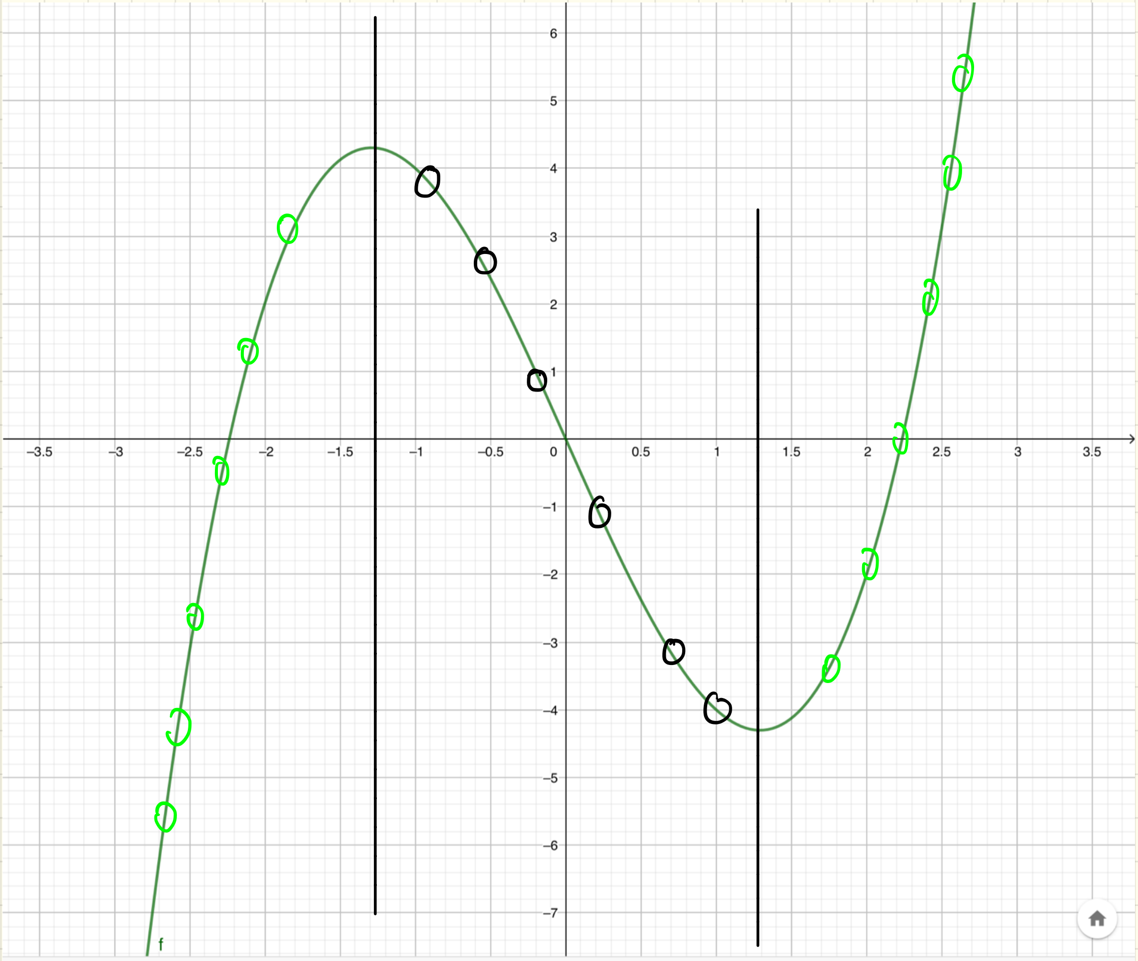
P2(0,4 | 0,053)

d) 0,3x-0,2=0,4

0,3x=0,6

x=2

P(2 | 0,2)

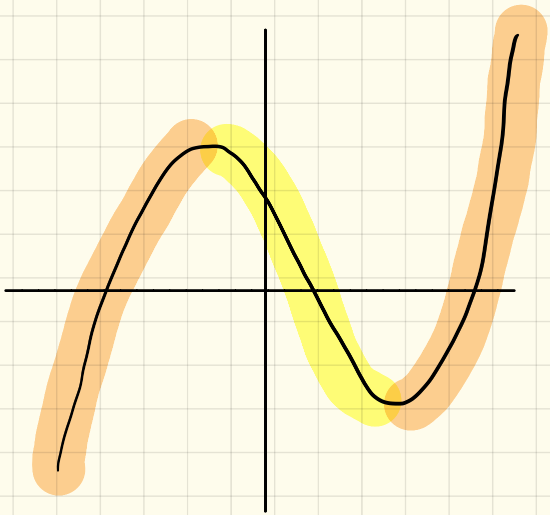


6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
f

III Funktionsanalyse

.12.18

III.1 Monotonie



Wir nennen eine Funktion in einem Intervall monoton fallend (bzw. steigend oder wachsend) wenn die Funktionswerte in diesem Intervall immer kleiner (bzw. größer) werden

Im monoton wachsenden Bereich gilt: $f'(x) \geq 0$

Im monoton fallenden Bereich gilt: $f'(x) \leq 0$

Ergänzung: streng monoton bedeutet, dass die Ableitung nicht $=0$ sein darf.

S.101 A1

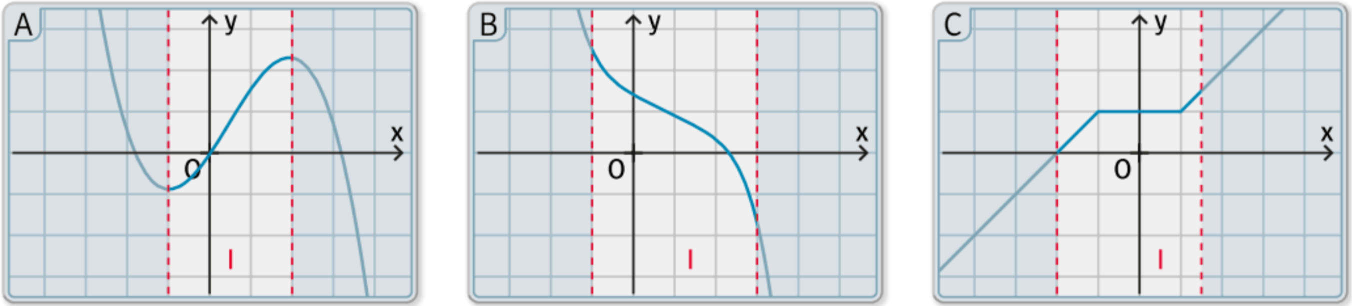
Welche Art von Monotonie gilt im gekennzeichneten Intervall I? Ordnen Sie zu.

f ist in I streng monoton wachsend.

f ist in I monoton fallend.

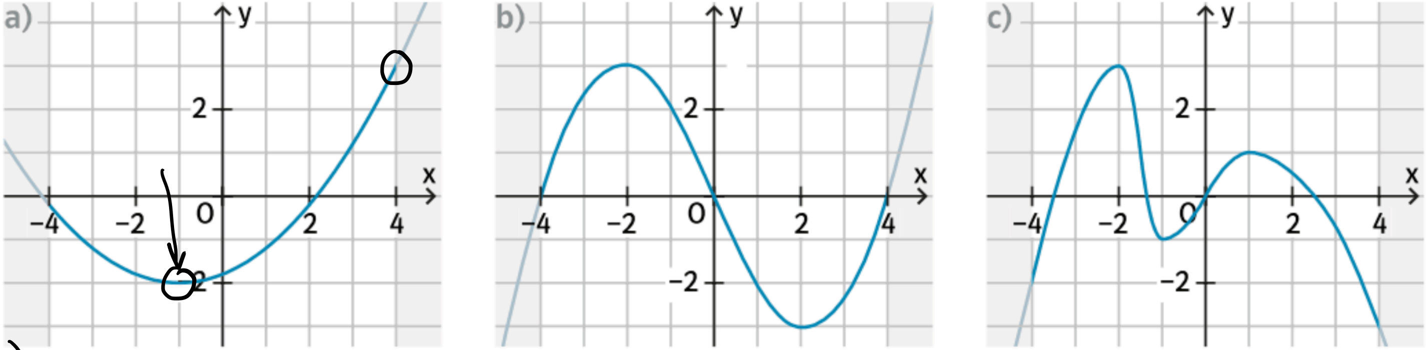
f ist in I monoton wachsend.

f ist in I streng monoton fallend.



S.101 A2

Der Graph von f ist für $-4 \leq x \leq 4$ skizziert. Entnehmen Sie dem Graphen im skizzierten Bereich möglichst große Intervalle, in denen die Funktion streng monoton wachsend bzw. fallend ist.



a)

Von −4 bis −1 -> fallend $\quad -4 \leq x \leq -1 \quad x \in [-4, -1]$

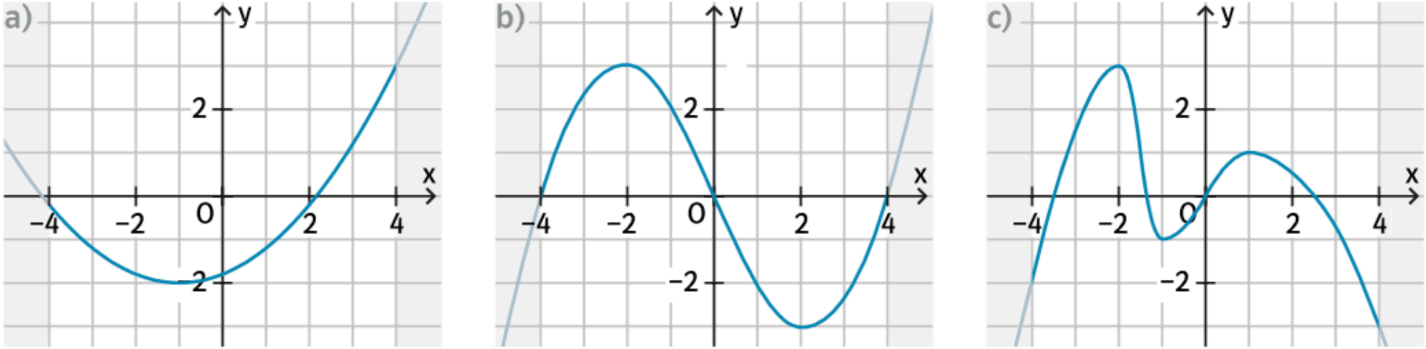
Von −1 bis 4 -> steigend $\quad -1 \leq x \leq 4 \quad x \in [-1, 4]$

---

b) $[-4, -2]$ -> steigend $\quad [2, 4]$ -> steigend

$[-2, 2]$ -> fallend

Der Graph von f ist für $-4 \le x \le 4$ skizziert. Entnehmen Sie dem Graphen im skizzierten Bereich möglichst große Intervalle, in denen die Funktion streng monoton wachsend bzw. fallend ist.



c)

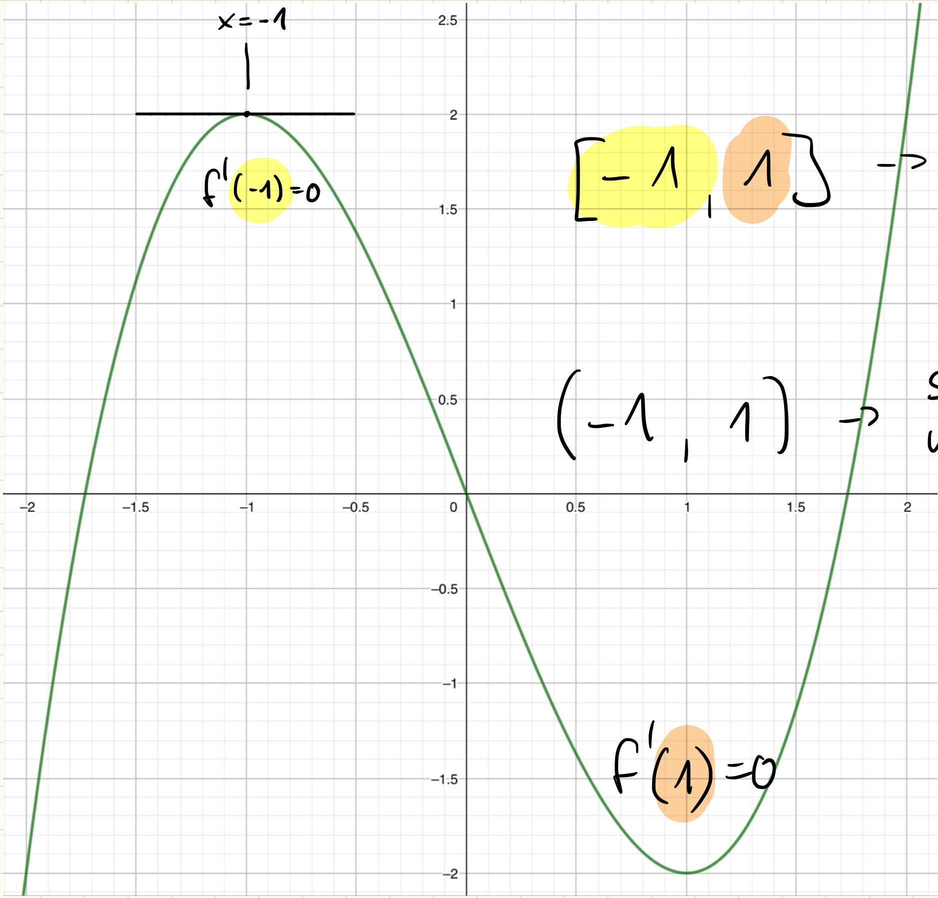
$[-4, -2] \rightarrow$ steigend

$[-2, -1] \rightarrow$ fallend

$[-1, 1] \rightarrow$ steigend

$[1, 4] \rightarrow$ fallend

$[-4, -2) \Rightarrow$ streng

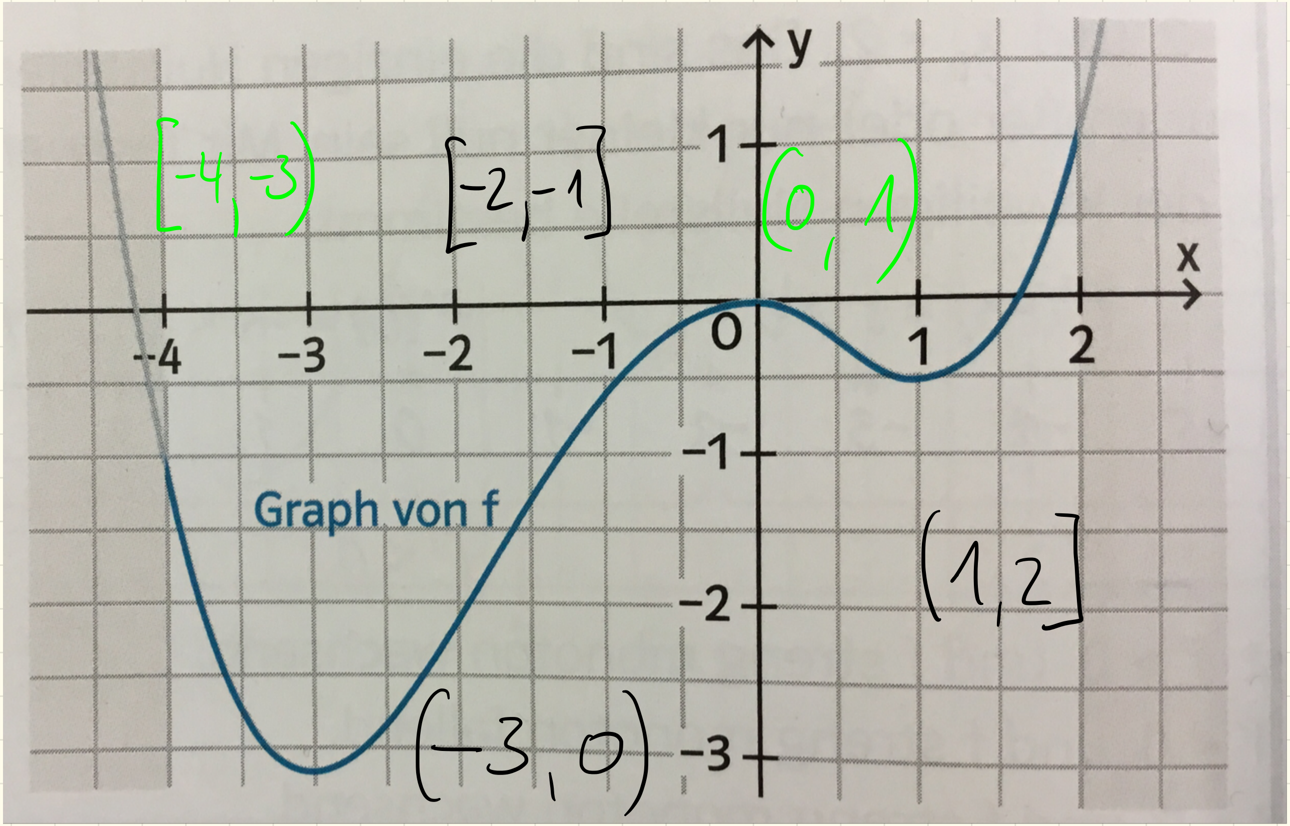


$[-1, 1] \rightarrow$ monoton fallend

$(-1, 1) \rightarrow$ streng monoton fallend

Achtung: Wollen wir ein streng monotones Intervall haben, so dürfen wir Stellen mit $f'(x) = 0$ nicht mit dazu nehmen!

z.B. können wir das Intervall dann an diesen Stellen mit einer runden Klammer schreiben.


y
x
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
Graph von f
[-4, -3)
[-2, -1]
(0, 1)
(1, 2]
(-3, 0)