

Mathematik 10b

Schuljahr 18/19

Organisation:

11.9.18

Heft/Ordner:

- * Übungsheft und Merkheft (oder Ordner)
- * kariert A4

Klassenarbeiten:

- * 4 KA
- * ca. 4 Kurztests (angesagt, als 1 KA)

Verhältnis:

- * 60% schriftlich
- * 40% mündlich

Kontakt:

- * schule@lehrer-kimmig.de
- * wiki.lehrer-kimmig.de
- * ab.lehrer-kimmig.de

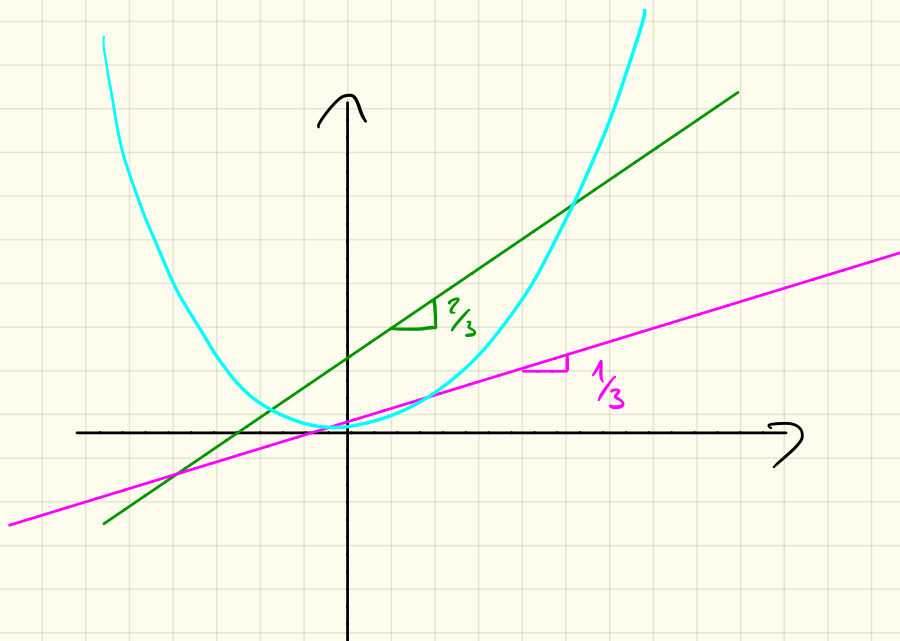
GFS möglich

Material:

- * Buch im Unterricht dabei haben! (zu zweit)
- * Geodreieck (jeder)
- * Bleistift und einige Farben

Inhalte:

- I. Zuordnungen und Funktionen
- II. Differenzialrechnung
- III. Vektoren
- IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Binomialverteilung
- V. Funktionsanalyse
- VI. Trigonometrie



I. Zuordnungen und Funktionen

I.1 Mengen

Eine Menge besteht aus mehreren Dingen, wie
z.B. Backzutaten, Menschen, Tieren, Einheiten, Zahlen, ...

Die einzelnen Dinge einer Menge heißen Elemente.

Beispiele: Schüler 10b = {Tobi, Claudio, Emil, Nils, ...}

Schulfächer = {Mathe, Deutsch, Physik, ...}

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

Bekannte Mengen aus der Mathematik:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \quad \text{natürliche Zahlen}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{ganze Zahlen}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{7}{9}, 5, \dots\right\} \quad \text{rationale Zahlen (Brüche)}$$

$$\mathbb{R} = \{\pi, \sqrt{3}, 0.1, 5, -6, \dots\} \quad \text{reelle Zahlen ("alle" Zahlen)}$$

Aufgabe (mündlich):

Beschreibe mit Worten, welche Mengen gemeint sind:

$A = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ Vielfache von 4

$B = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ Vielfache von 6

$C = \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ Brüche mit 1 im Zähler

$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ Alle Teiler von 12

$E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ Primzahlen

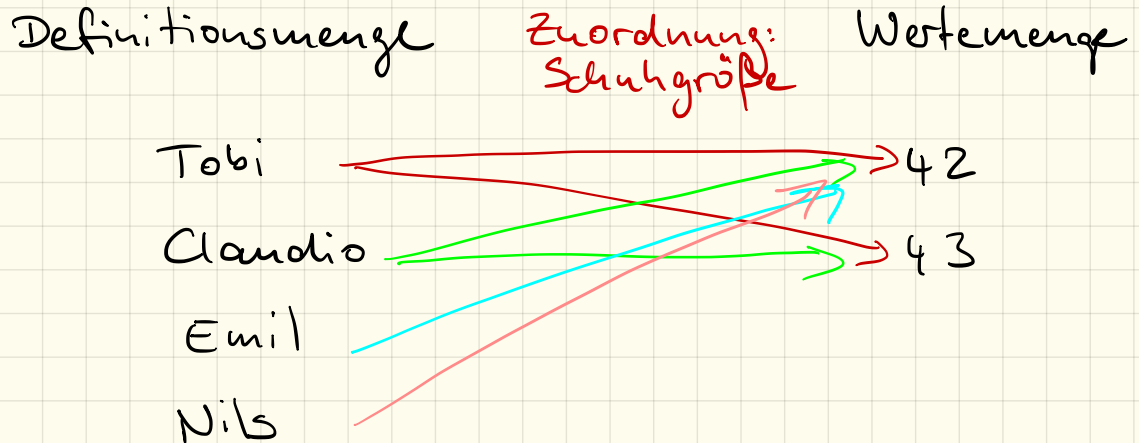
$F = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ Quadratzahlen

$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2$

I.2 Zuordnungen und Funktionen

Elementen einer sogenannten Definitionsmenge D_f werden bei einer Zuordnung Elemente einer sogenannten Wertemenge W zugeordnet

Beispiel:



Mathematisches Beispiel:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Definitions-
menge

Werte-
menge

Eine Funktion ordnet jedem Element der Definitionsmenge maximal ein Element der Wertemenge zu.

Aufgabe (mündlich):

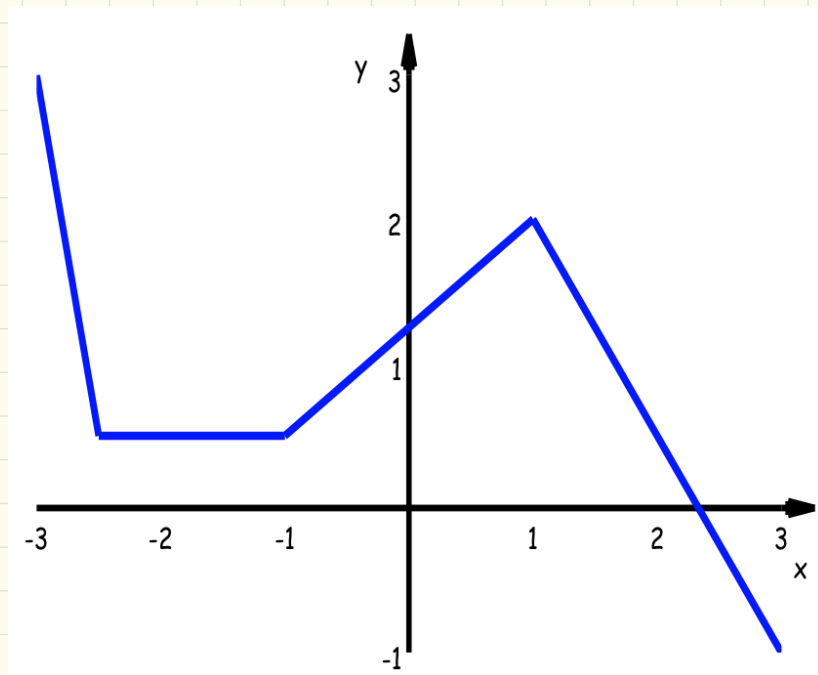
Ist diese Zuordnung eine Funktion?

x	y
1	-5
3	1
5	4
-2	6
3	2
-4	-3
0	7
6	0

nein!

Aufgabe (mündlich)

Stellt dieses Schaubild eine Funktion dar?



ja!

Aufgabe (mündlich):

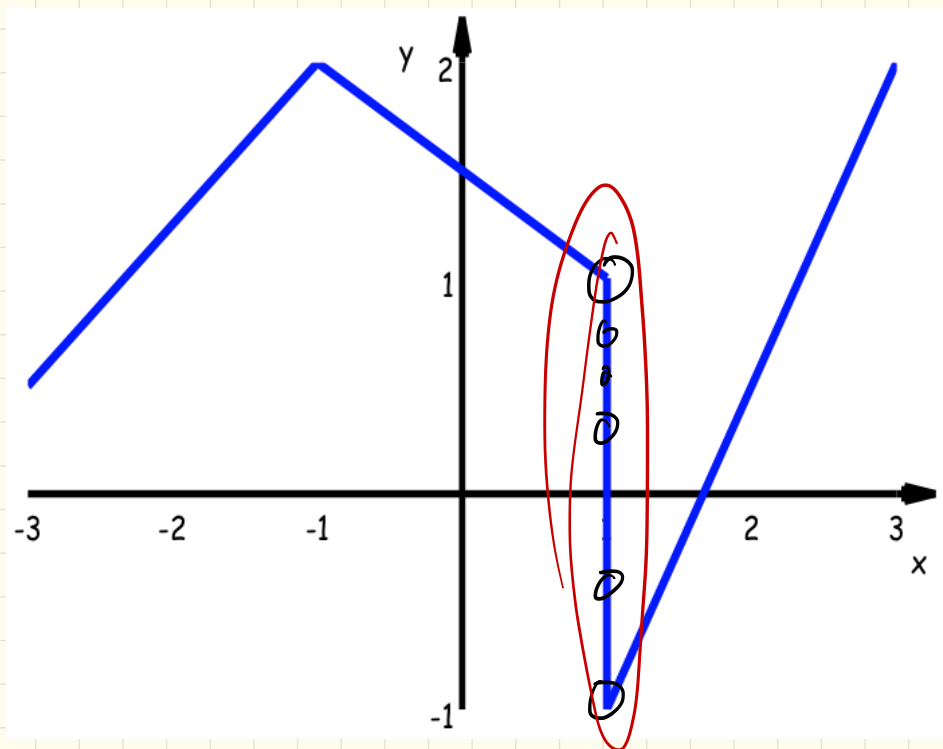
Ist diese Zuordnung eine Funktion?

x	y
-6	9
0	6
7	0
3	4
2	3
4	5
1	3
3	4

ja!

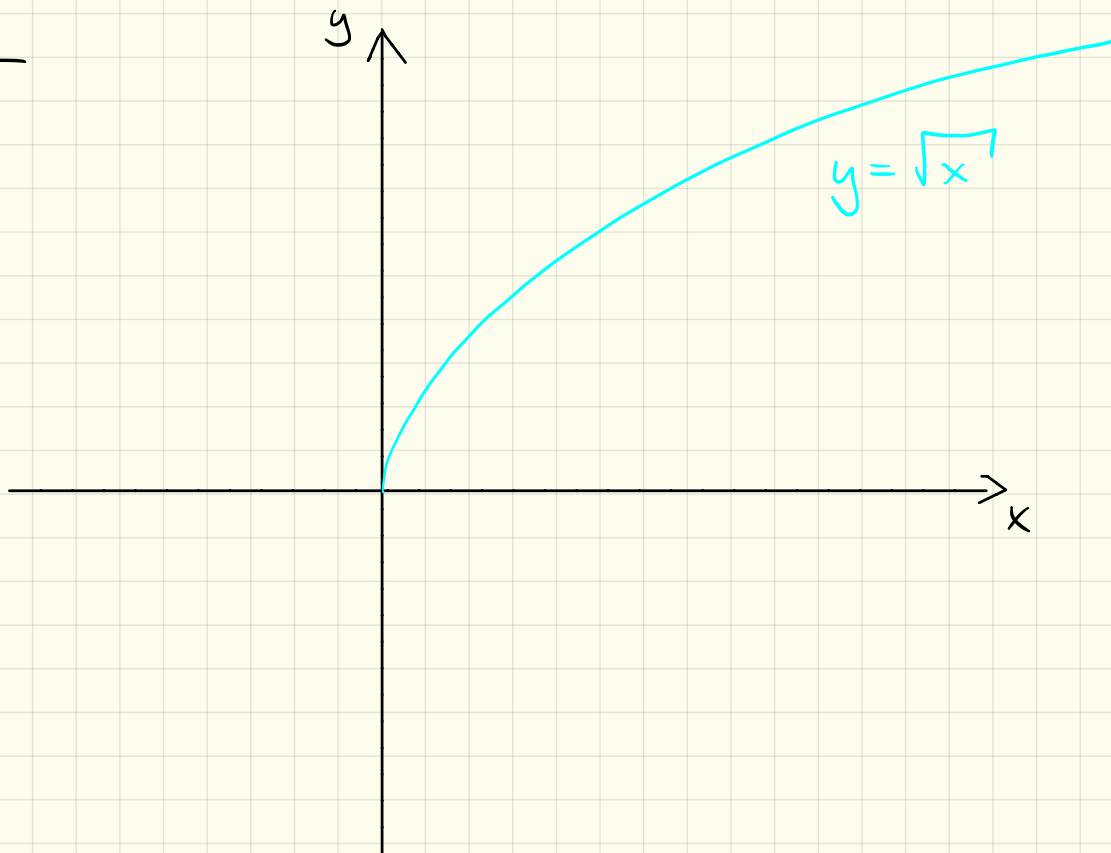
Aufgabe (mündlich):

Stellt dieses Schaubild eine Funktion dar?



nein!

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
-4	—
-9	—



I.2.1 Darstellungsarten von Funktionen

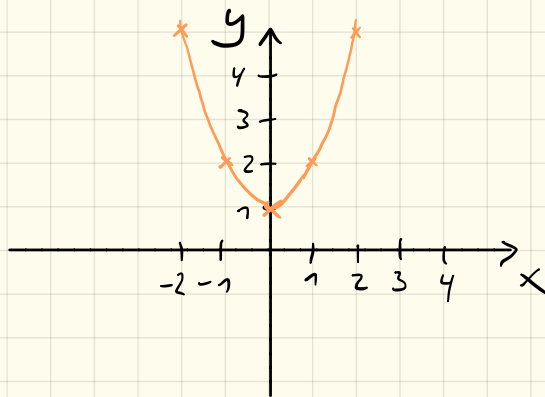
Funktionsgleichung

$$y = x^2 + 1$$

einsetzen
und
ausrechnen

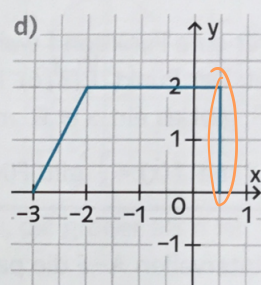
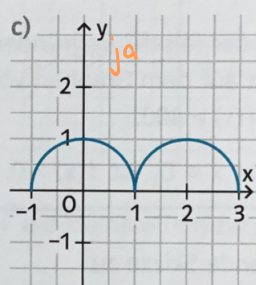
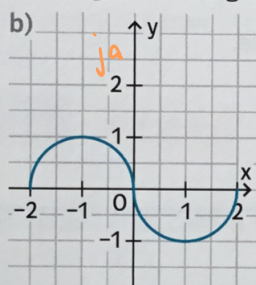
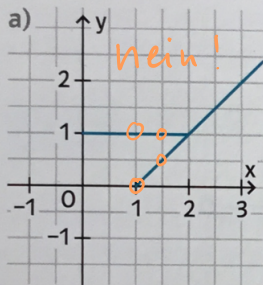
Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5	10	17

Punkte
einzeichnenGraph im
Koordinatensystem

Aufgaben

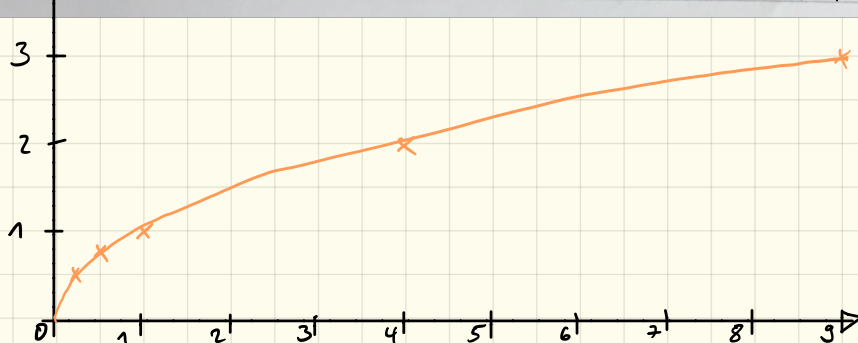
1 Ist der Graph einer Funktion dargestellt? Begründen Sie Ihre Antwort.



2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$.

Ergänzen Sie im Heft die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von f .

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	0	0,5	0,71	1	1,41	1,73	2	2,23	2,44	2,64	2,82	3



I.3 Intervalle

Da Definitions- und Wertemenge oft in den reellen Zahlen liegen, benutzt man zu deren Beschreibung oft die Intervallschreibweise.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$

→ Definitionsmenge ohne negative Zahlen!

→ $\mathbb{D}: 0 \leq x < \infty$

→ $x \in [0, \infty)$

Beispiel 2: $\sqrt{\frac{1}{x}}$

→ $\mathbb{D}: 0 < x < \infty$

→ $x \in (0, \infty)$

Beispiele:

$$x \in [5, 7] \quad \text{meint:} \quad 5 \leq x \leq 7$$

$$x \in (3, 9] \quad \text{meint:} \quad 3 < x \leq 9$$

$$x \in [1, 6) \quad \text{meint:} \quad 1 \leq x < 6$$

$$x \in (-2, 5) \quad \text{meint:} \quad -2 < x < 5$$

I.4 Definitions- und Wertemenge von Funktionen

Merke: Definitionsmenge sind alle Zahlen, die man in die Funktion einsetzen darf (x-Werte)

Wertemenge sind alle möglichen Ergebnisse (y-Werte)

Beispiel: $f(x) = x^2 - 5$

$$D: x \in (-\infty, \infty)$$

$$W: y \in [-5, \infty)$$

Beispiel 2; $f(x) = -x^2 + 1$

$$D: x \in (-\infty, \infty) \text{ oder } x \in \mathbb{R}$$

$$W: y \in (-\infty, 1]$$

18.9.18

Aufgabe: Bestimme den Definitions- und Wertebereich von $f(x) = \frac{1}{x^2}$

D: alles außer 0 ,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} , x \notin \{0\}$$

↑
Element
der Menge

↑
reelle
Zahlen

↑ außer
↑ Null

$$W: (0, \infty)$$

S. 9, Nr. 10

● 10 ☒ Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

c) $f(x) = 1,5$

d) $f(x) = -0,5x + 1$

$$\mathcal{D} = (-\infty, \infty) \\ = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, \infty) \\ = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, \infty) \\ = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{W} = [1, \infty)$$

$$\mathcal{W} = (1, \infty)$$

$$\mathcal{W} = \overline{[1,5, 1,5]} \\ = \{1,5\}$$

$$\mathcal{W} = (-\infty, \infty) \\ = \mathbb{R}$$

S. 8. Nr. 4 + 5

- 4 Welche Aussagen drücken denselben Sachverhalt für eine Funktion f aus?

$1 \notin W_f$

A

$1 \in D_f$

B

$1 \notin D_f$

D

$1 \in W_f$

C

F

Die Funktion f ist für $x = 1$ nicht definiert.

E

Der Graph von f enthält einen Punkt mit der x -Koordinate 1.

G

1 ist ein Funktionswert von f .

H

Auf dem Graphen von f liegt kein Punkt mit der y -Koordinate 1.

- 5 Statt „Der Funktionswert von f an der Stelle 2 ist 7.“ schreibt man kurz $f(2) = 7$. Drücken Sie entsprechend in mathematischer Kurzschrift aus.

a) Durch die Funktion f wird der Zahl $\sqrt{7}$ die Zahl 8 zugeordnet. $f(\sqrt{7}) = 8$

b) Die Funktion g nimmt an der Stelle 3,5 den Funktionswert -1 an. $g(3,5) = -1$

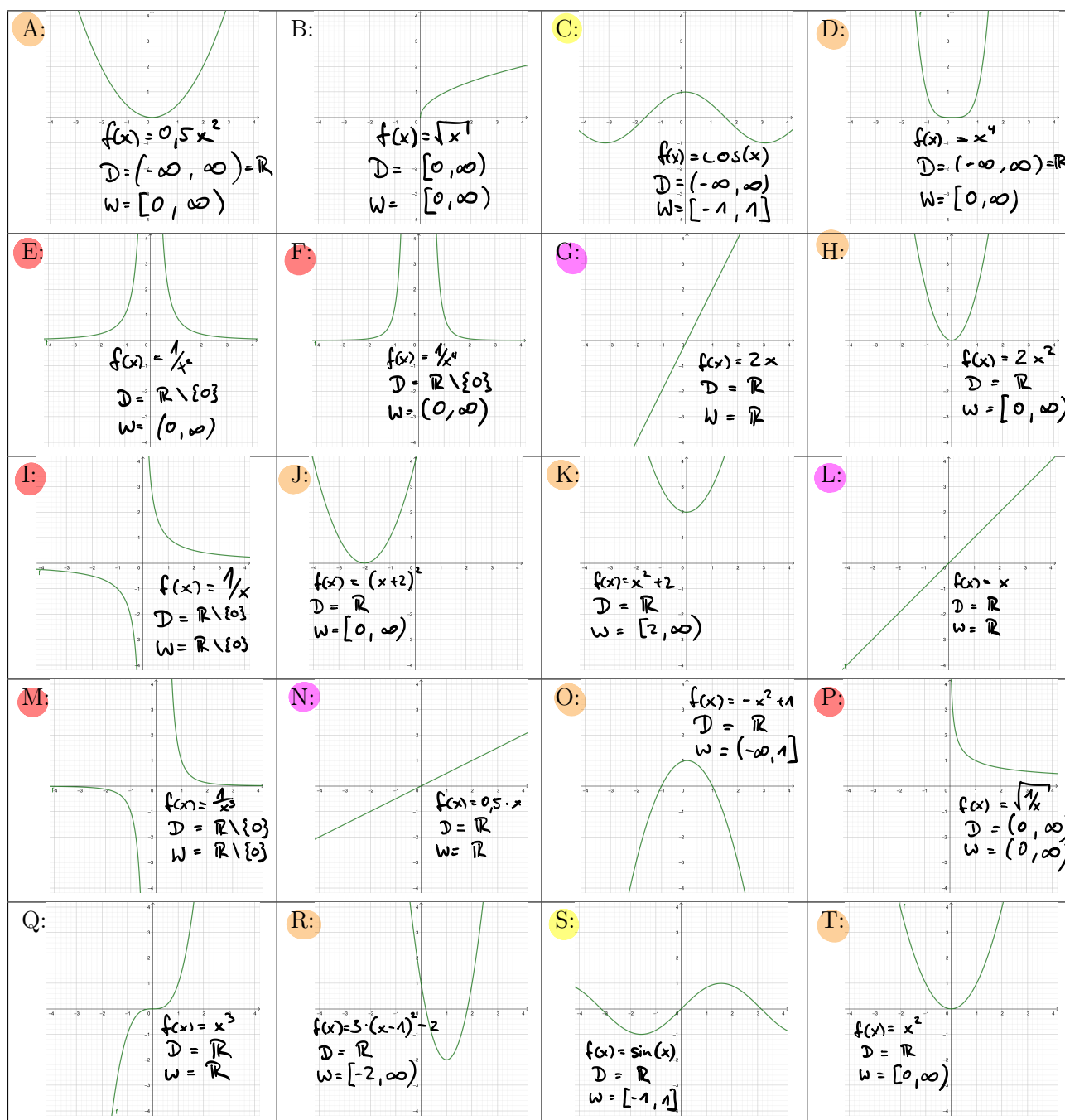
c) Die Funktionen f und g nehmen an der Stelle 5 denselben Funktionswert an. $f(5) = g(5)$

d) Wenn man in den Funktionsterm von h die Zahl 3 einsetzt, erhält man 19.

$$h(3) = 19$$

Graphen einfacher Funktionen

Ordne den Schaubildern die Funktionen zu und gib den Definitions- und Wertebereich an.



- | | | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------------|-------------------|------------------------|
| • x | • $0.5 \cdot x^2$ | • $-x^2 + 1$ | • $\frac{1}{x}$ | • $\sqrt{x}$ |
| • $0.5 \cdot x$ | • $2 \cdot x^2$ | • $3 \cdot (x-1)^2 - 2$ | • $\frac{1}{x^2}$ | • $\sqrt{\frac{1}{x}}$ |
| • $2 \cdot x$ | • $(x+2)^2$ | • x^3 | • $\frac{1}{x^3}$ | • $\sin(x)$ |
| • x^2 | • $x^2 + 2$ | • x^4 | • $\frac{1}{x^4}$ | • $\cos(x)$ |

I. 5 Funktionsklassen

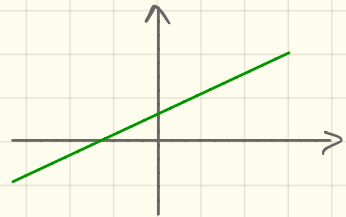
Wir können Funktionen in verschiedene Gruppen einteilen:

1. lineare Funktionen:

Gerade im Schaubild

$$f(x) = x \quad / \quad f(x) = x + 2 \quad / \quad f(x) = 2x$$

→ kein Exponent bei x

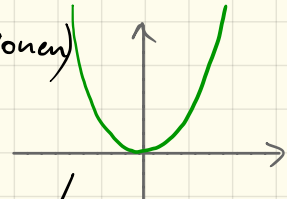


2. Parabeln: (quadratische Funktionen)

Bogen im Schaubild

$$f(x) = x^2 \quad / \quad f(x) = x^2 + 1 \quad / \quad f(x) = 0,5 x^2$$

→ Als Exponent bei x immer 2

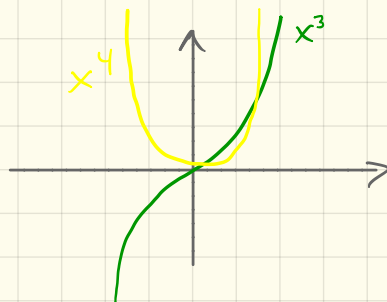


3. ganzrationale Funktionen

$$f(x) = x^3 \quad / \quad f(x) = x^4 \quad /$$

$$f(x) = 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2$$

→ auch höhere Exponenten möglich

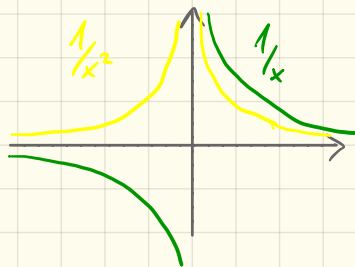


25.9.18

4. gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad / \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

→ x steht im Nenner



5. Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$



6. Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin(x) \quad / \quad f(x) = \cos(x) \quad /$$

$$f(x) = \tan(x)$$

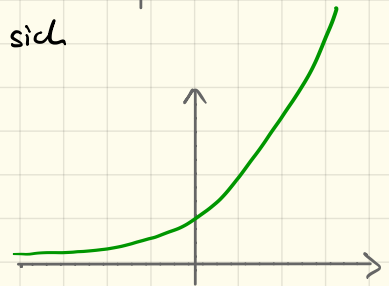


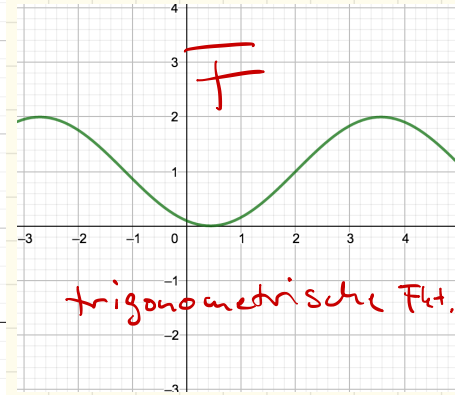
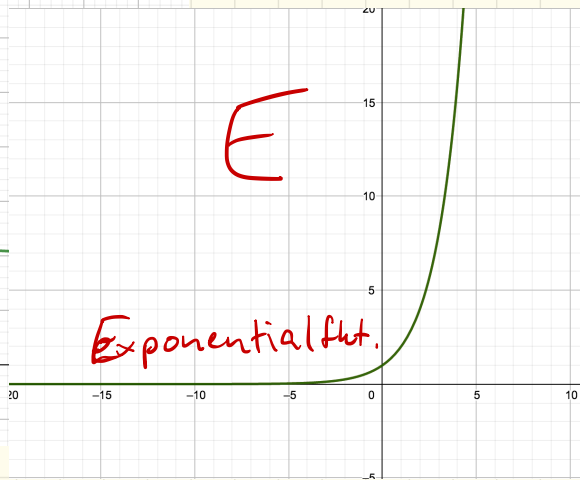
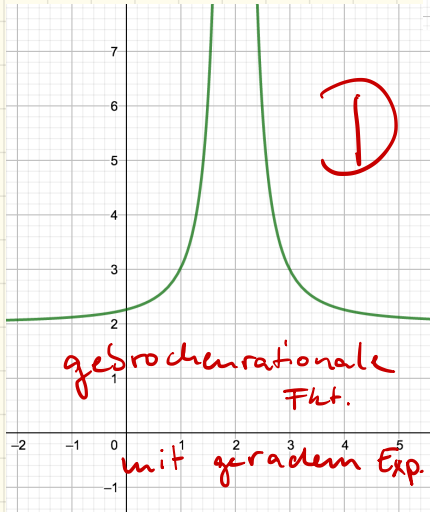
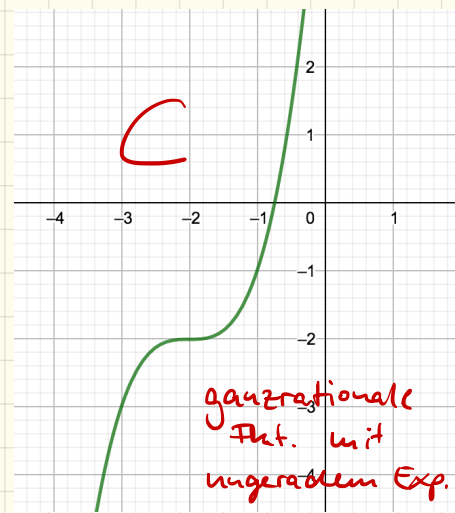
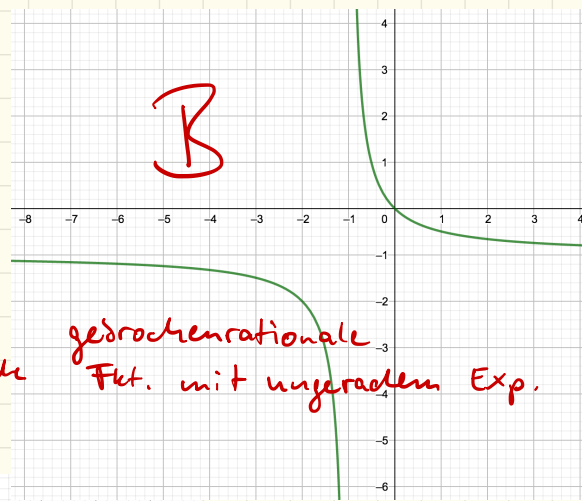
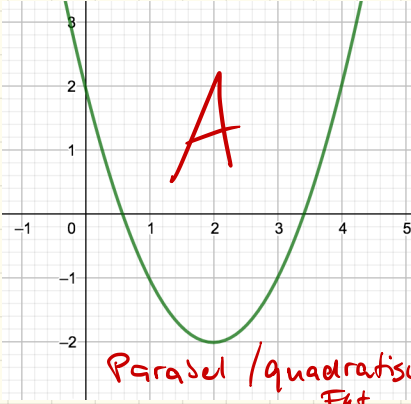
→ periodische Funktionen, wiederholen sich

7. Exponentialfunktionen

$$f(x) = 2^x$$

→ x steht im Exponent

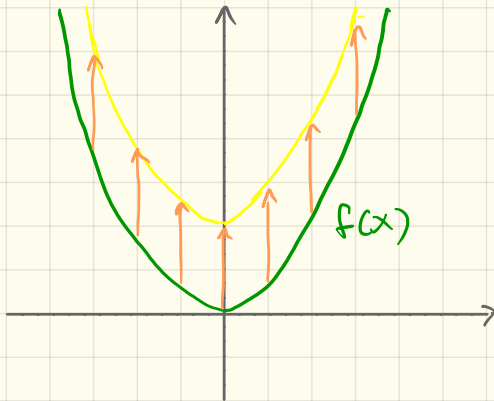




I.6 Verschieben und Strecken von Funktionen / Graphen

Wir können die sogenannte Normalparabel im Schaubild verschieben oder Strecken indem wir verschiedene Parameter verändern.

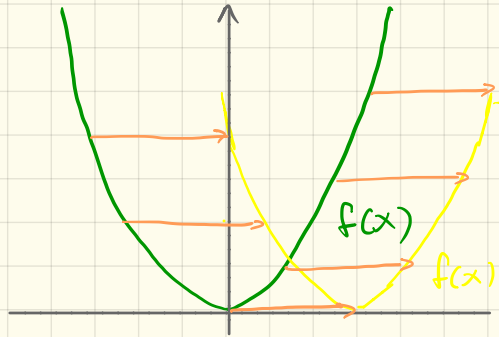
1. Verschiebung in y-Richtung



Die Normalparabel wird um einen Wert c nach oben verschoben, indem wir den Wert c zur Funktion dazu addieren.

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x) = x^2 + 2$$

2. Verschiebung in x-Richtung



Eine Funktion kann nach rechts (oder links) verschoben werden, indem wir x durch $(x-b)$ ersetzen

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x) = (x-b)^2$$

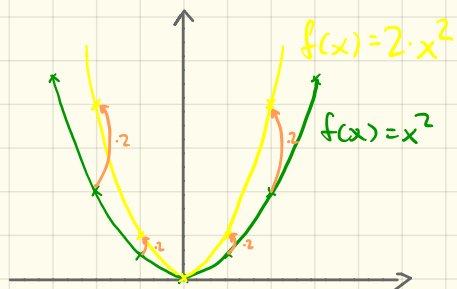
Achtung: Verschiebung nach rechts $\rightarrow$ Minus in Klammer
Verschiebung nach links $\rightarrow$ Plus in Klammer

Beispiel: Verschiebe $f(x) = x^2$ um 4 nach unten und 3 nach links

$$\rightarrow f(x) = (x+3)^2 - 4$$

nach links nach unten

3. Streckung



Eine Funktion wird um einen Faktor a gestreckt, indem wir diesen mit der Funktion multiplizieren.

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x) = a \cdot x^2$$

Beispiel: $f(x) = x^2$ soll um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt, um 2 nach oben und um 1 nach rechts verschoben werden:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + 2$$

Aufgabe: S. 11 A1

1 Wie erhält man aus dem Graphen von f mit $f(x) = x^2$ den Graphen von g ?

a) $g(x) = x^2 - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

d) $g(x) = (x - 3)^2$

e) $g(x) = x^2 + 1,5$

f) $g(x) = (x + 4)^2$

g) $g(x) = x^2 + 0,5$

h) $g(x) = 0,6x^2$

Mögliche GFS-Themen Mathe Klasse 10

Funktionsanalyse

- Polynomdivision
- Brennpunkt einer Parabel
- Trassierungen
- Parameterdarstellung von Kurven

Geometrie

- Kugelgeometrie
- Vektoren und Punkte im Raum

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Pascal'sches Dreieck
- Erwartungswert
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Galtonbrett

Mögliche GFS-Themen in Physik Klasse 10

Mechanik

- Leichtathletik physikalisch betrachtet: Optimaler Absprung beim Weitsprung
- Kreisbewegungen in der Natur
- Geostationäre Satelliten
- Warum fällt ein Kreisel nicht um?

Atomphysik

- Marie Curie und ihre Forschungen
- Auswirkung von Strahlung auf den Körper

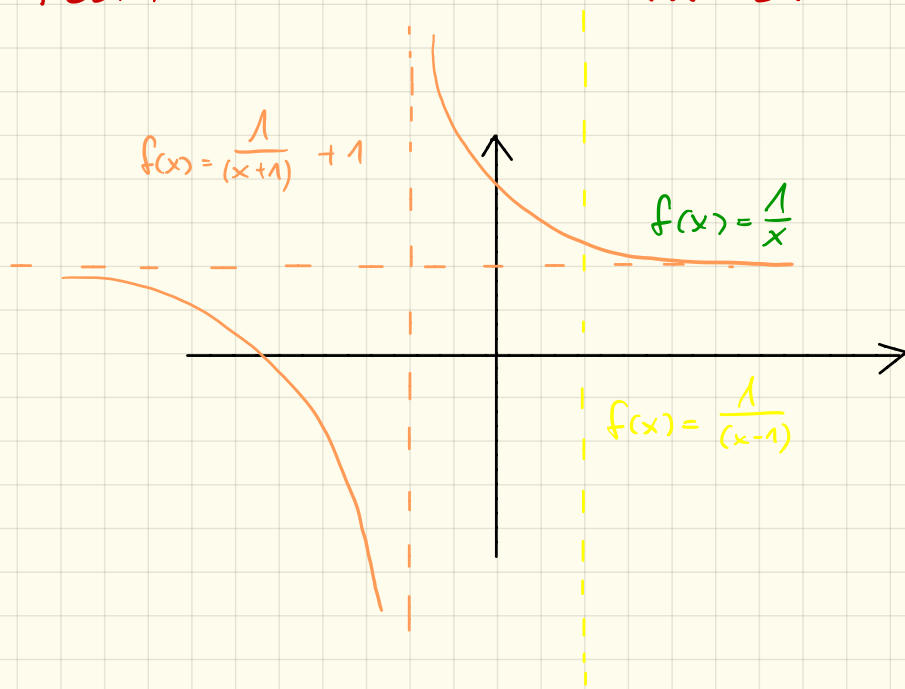
Energie

- Energieerhaltungssatz beim Treibhauseffekt

Ordne den Schaubildern die richtigen Gleichungen zu.

$y = (x+1)^2 - 3$	$y = (x+3)^2 + 2,5$	$y = (x-3)^2 + 2$
$y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$	$y = -(x-3)^2 + 2$	$y = -2(x+2)^2 + 5$
$y = 0,5(x+2)^2 - 2$	$y = 0,5(x+2)^2 - 5$	$y = 0,5(x-2)^2 - 5$
$y = 2 \cdot (x+2)^2 - 5$	$y = -(x-2)^2 + 2$	$y = -2(x-2)^2 + 3$
$y = 0,5(x+2)^2 - 2$	$y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$	$y = 0,5(x-2)^2 - 5$
$y = -(x-3)^2 + 2$	$y = 0,5(x+2)^2 - 5$	$y = -2(x-2)^2 + 3$
$y = -2(x+2)^2 + 5$	$y = (x+1)^2 - 3$	$y = -(x-2)^2 + 2$
$y = (x-3)^2 + 2$	$y = 2(x+2)^2 - 5$	$y = (x+3)^2 + 2,5$

Test: Wie Arbeitsblatt am 5.10.

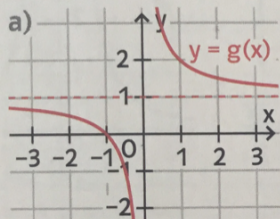


S. 12 A4

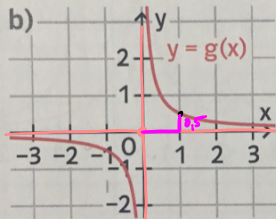
28.8.18

4 Beschreiben Sie, wie man den Graphen der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f mit

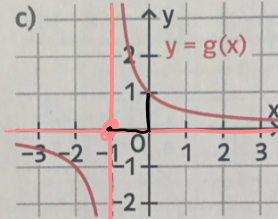
$f(x) = \frac{1}{x}$ (Fig. 1) erhält, und geben Sie einen Funktionsterm für g an.



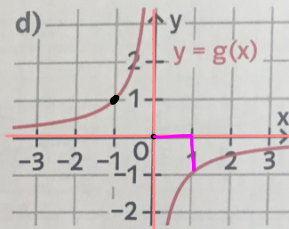
$$y = \frac{1}{x} + 1$$



$$y = 0,5 \cdot \frac{1}{x}$$



$$y = \frac{1}{(x+1)}$$



$$y = -\frac{1}{x}$$

a) $f(x) = x^2$

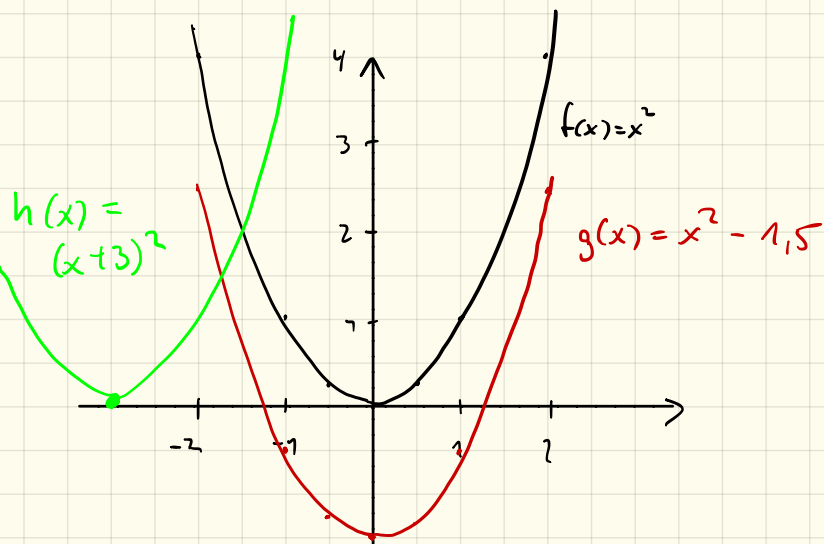
b) $f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 - 1,5$

$g(x) = x^2 + 1$

$h(x) = (x + 3)^2$

$h(x) = (x - 3)^2$



S. 12 A5

5 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{x} + 1$

$h(x) = \sqrt{x-3}$

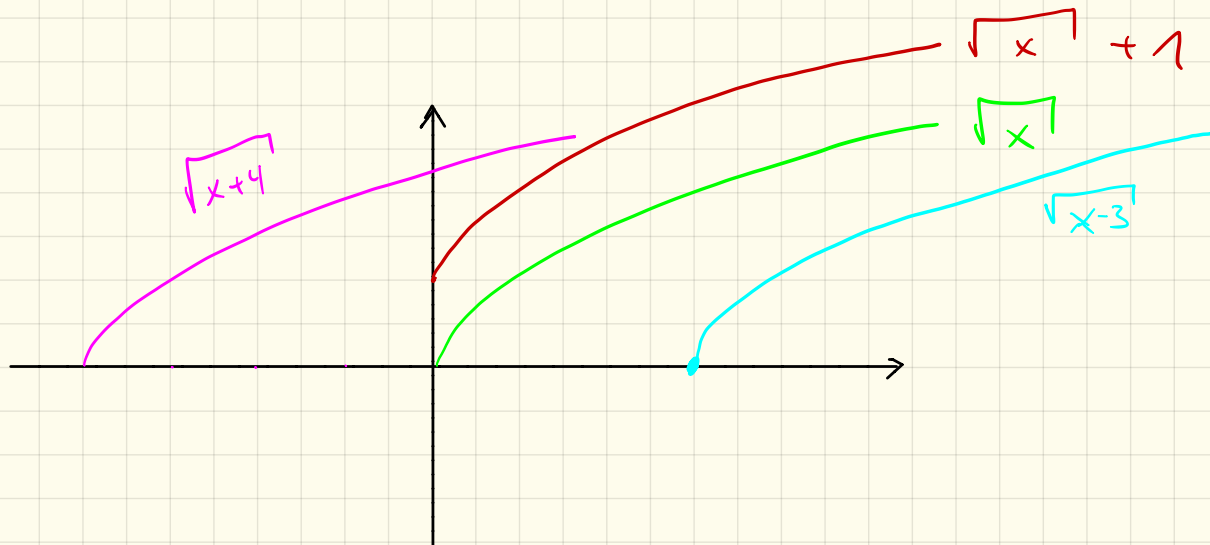
$i(x) = \sqrt{x+4}$

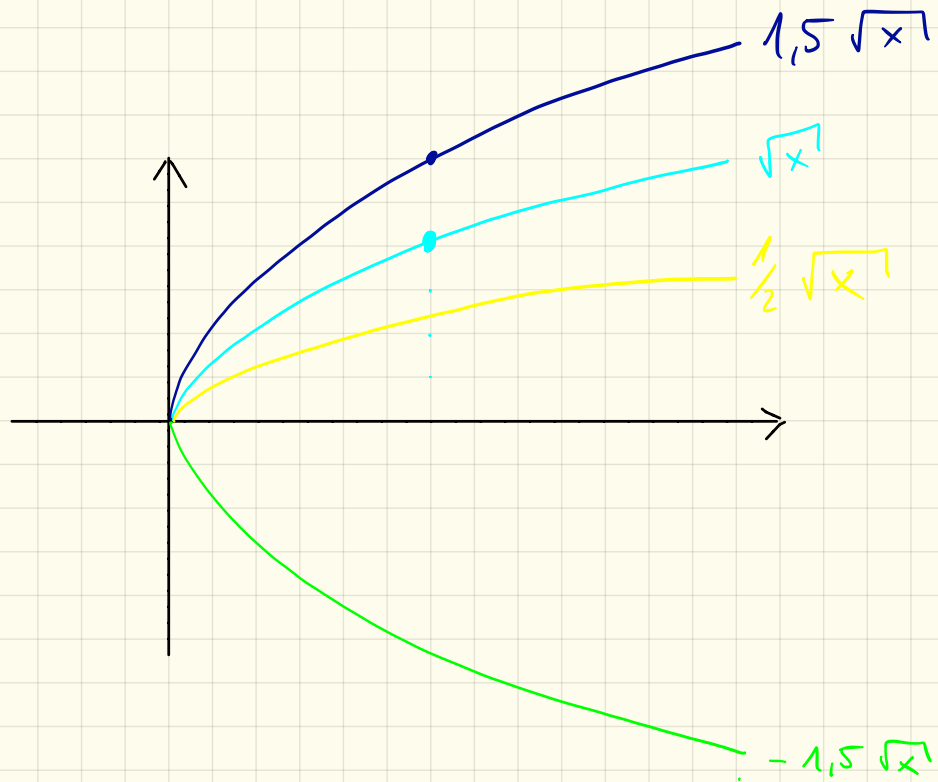
b) $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = 1,5\sqrt{x}$

$h(x) = -1,5\sqrt{x}$

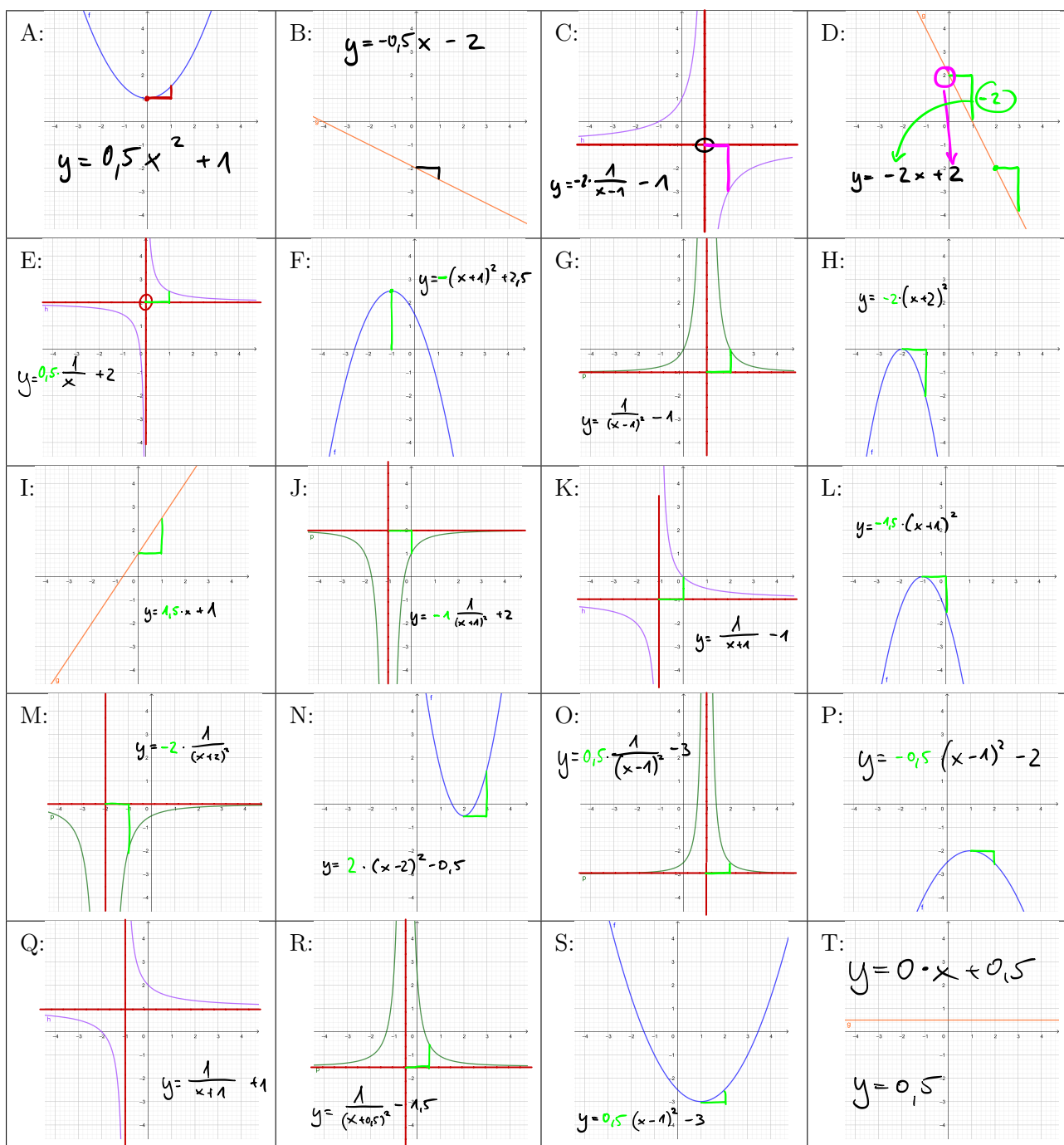
$i(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$





Verschobene Funktionen

Gib für jedes Schaubild die entsprechende Funktion an.



II. Differenzialrechnung

II.1 mittlere Änderungsrate

Bei einer Autofahrt von Stuttgart nach Hannover legt man folgende Strecken zurück:

Zeit in h	0	1	2	3	4	5
Strecke in km	0	130	185	320	470	510

- a) Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit?
b) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Stunde 1 und 3?

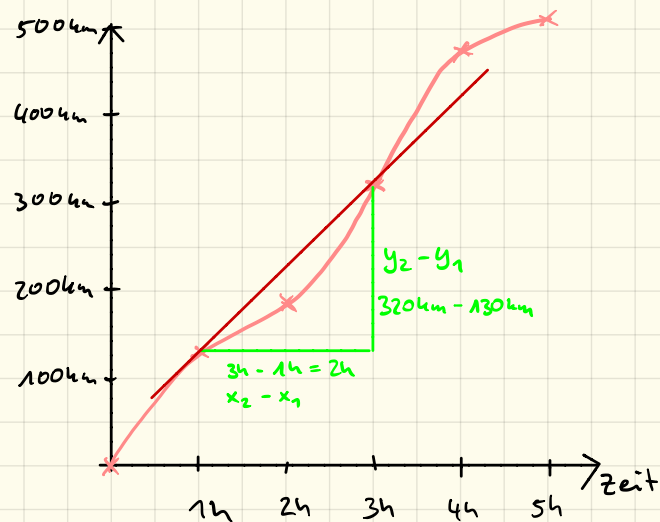
$$a) \quad \frac{510 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 102 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$b) \quad \frac{320 \text{ km} - 130 \text{ km}}{3 \text{ h} - 1 \text{ h}} = \frac{190 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 95 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der sogenannte Differenzenquotient ist der Quotient aus folgenden beiden Differenzen:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

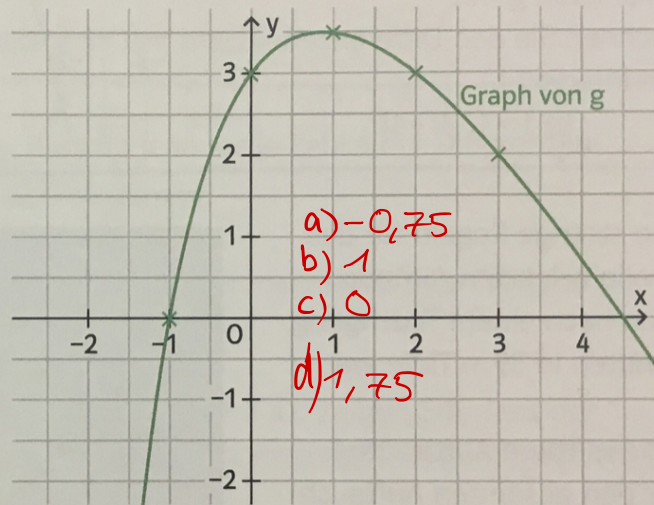
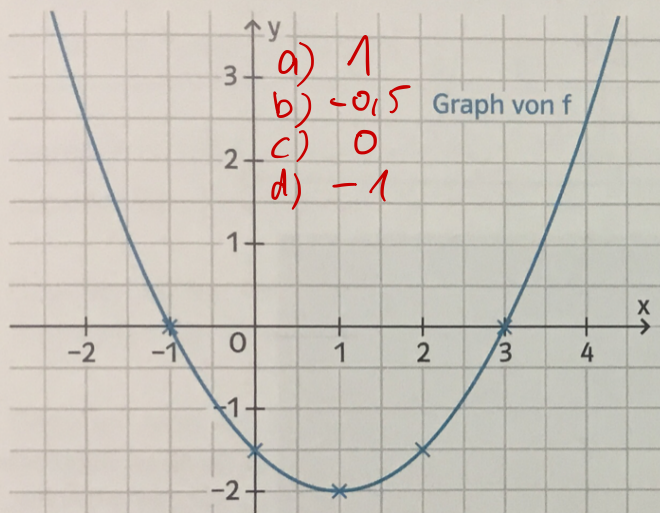


Der Differenzenquotient entspricht der Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$.

Die Gerade heißt Sekante

S. 37

- 1 ☒ Gegeben sind die Graphen der beiden Funktionen f und g.



Bestimmen Sie den Differenzenquotienten von f im angegebenen Intervall. Verfahren Sie danach ebenso mit g.

a) $I = [1; 3]$

b) $I = [-1; 2]$

c) $I = [0; 2]$

d) $I = [-1; 1]$

2 ☒ Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall I .

- S. 37
- | | | | |
|---|--|--|--|
| a) $f(x) = x^2$
$I = [0; 2]$ 2 | b) $f(x) = 3x^2$
$I = [-1; 3]$ 6 | c) $f(x) = 2x^3$
$I = [-1; 1]$ 2 | d) $f(x) = 3x^2 - 4$
$I = [1; 3]$ 12 |
| e) $f(x) = 2x^2 - 3$
$I = [2; 4]$ 12 | f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$
$I = [-2; 1]$ -0,5 | g) $f(x) = \sqrt{x}$
$I = [4; 9]$ 0,2 | h) $f(x) = \frac{1}{x}$
$I = [-1; -0,5]$ -2 |

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = -2 \\ y_2 &= f(x_2) = 2 \end{aligned}$$

$$x_2 - x_1 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 4$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{2} = 2$$

S.39

8 Die Funktion h beschreibt die Höhe eines Ballons in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Minuten nach dem Start, $h(t)$ in Meter). Der Ballon fährt 6 min nach dem Start in 170 m Höhe. Im Zeitintervall zwischen 6 min und 8 min steigt der Ballon mit der mittleren Geschwindigkeit $40 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ senkrecht nach oben.

Ist die folgende Angabe richtig, falsch oder möglicherweise richtig?

a) $h(8) = 210$

b) $h(6) = 170$

c) $h(7) = 210$

d) $h(8) = 250$

e) $h(10) = 330$?

f) $h(7) = 180$



t	0						6	7	8	9	10
$h(t)$	0						170	210	250		

S. 39

10 Bestimmen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall I .

a) $f(x) = (x - 2)^2$, $I = [1; 6]$ 3

b) $f(x) = \frac{9}{x^2} - 3$, $I = [-3; -1]$ 4

c) $f(x) = \sqrt{x + 5} + x$, $I = [-4; -1]$ $\frac{4}{3}$

d) $f(x) = x^3 + x^2$, $I = [-2; 4]$ 14

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 4$$

$$y_1 = f(x_1) = (-2)^3 + (-2)^2 = -4$$

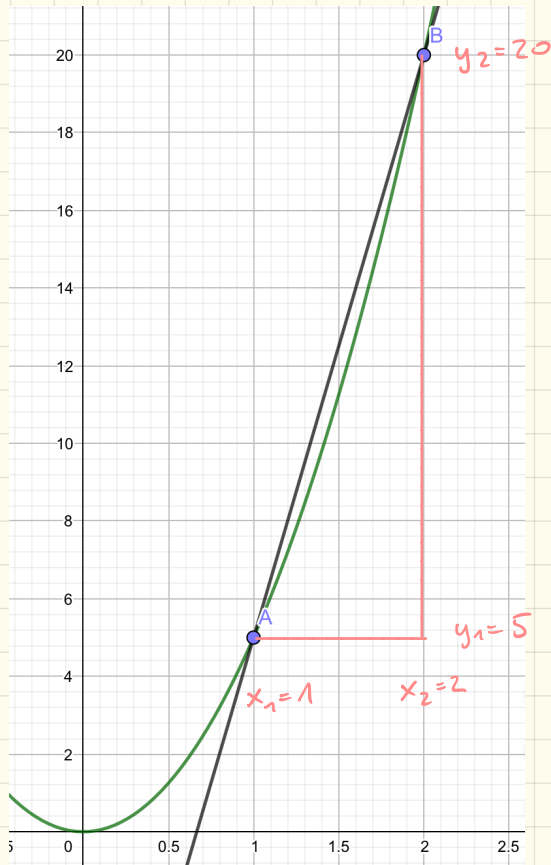
$$y_2 = f(x_2) = 4^3 + 4^2 = 80$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

$$y_2 - y_1 = 84$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{84}{6} = 14$$

II.2 momentane Änderungsrate — Ableitung



Für einen fallenden Gegenstand
gilt $s(t) = 5 \cdot t^2$

Wie groß ist die durchschnittliche
Geschwindigkeit zwischen $t_1 = 1s$
und $t_2 = 2s$?

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 5}{2 - 1} = 15$$

Diese durchschnittliche Geschwindigkeit
liegt teilweise weit von der tatsächlichen
Geschwindigkeit entfernt.

Uns interessiert die tatsächliche Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = 1s$.

Dazu nähern wir t_2 schrittweise an t_1 an:

1. Schritt: $t_1 = 1s$ $s(t_1) = 5$ $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = 12,5$
 $t_2 = 1,5s$ $s(t_2) = 11,25$

2. Schritt: $t_1 = 1s$ $s(t_1) = 5$ $\frac{6,05 - 5}{1,1 - 1} = 10,5$
 $t_2 = 1,1s$ $s(t_2) = 6,05$

3. Schritt: $t_1 = 1s$ $s(t_1) = 5$ $\frac{5,1005 - 5}{1,01 - 1} = 10,05$
 $t_2 = 1,01s$ $s(t_2) = 5,1005$

4. Schritt: $t_1 = 1s$ $s(t_1) = 5$ $\frac{5,010005 - 5}{1,001 - 1} = 10,005$
 $t_2 = 1,001s$ $s(t_2) = 5,010005$

Fazit: Verkleinert man den Abstand zwischen t_1 und t_2 ,
so nähert sich der Wert (im Beispiel) immer weiter an
die 10 an. Man spricht vom sogenannten Grenzwert.

Wir versuchen, diesen Grenzwert mathematisch zu berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{s(t_2) - s(1)}{t_2 - 1} &= \frac{5 \cdot t_2^2 - 5 \cdot 1^2}{t_2 - 1} = \frac{5(t_2^2 - 1^2)}{t_2 - 1} = \frac{5 \cdot (t_2 + 1) \cdot (t_2 - 1)}{(t_2 - 1)} \\ &= 5 \cdot (t_2 + 1)\end{aligned}$$

Hier in das umgeformte Ergebnis
dürfen wir für t_2 direkt den Wert
1 einsetzen: $5 \cdot (1+1) = \underline{\underline{10}}$

Distributivgesetz:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b+c)$$

1. Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

18.10.18

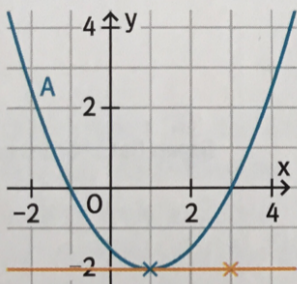
Definition: Strebt der Grenzwert des Differenzenquotienten gegen einen festen Wert, so nennen wir diesen die Ableitung. Diese gibt die Steigung an,

Schreibweise: Man schreibt $f'(x)$

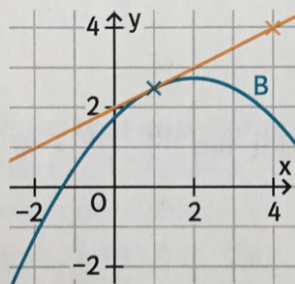
S.42

1 ☒ Entscheiden Sie, zu welchem der Graphen A bis D die Ableitungen gehören.

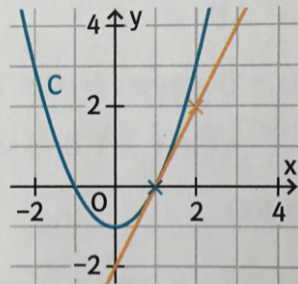
(1) $f'(1) = 2$



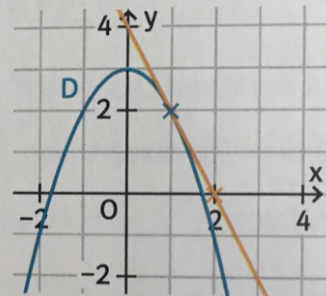
(2) $f'(1) = -2$



(3) $f'(1) = 0,5$



(4) $f'(1) = 0$



$f'(1) = 0$

$f'(1) = 0,5$

$f'(1) = 2$

$f'(1) = -2$

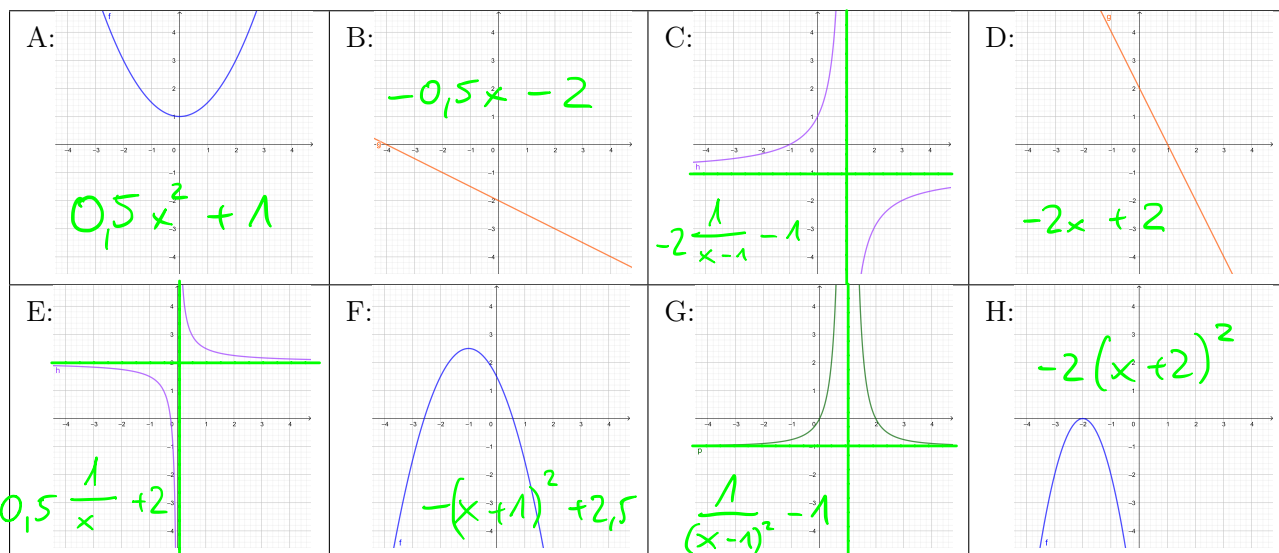
Themen KA: 6.11.

- Funktionsklassen zuordnen
- Verschieben und Strecken von Funktionen
- Differenzenquotient
- Ableitung

Übersicht zur 1. Klassenarbeit

1. Funktionsgleichungen bestimmen

Gib für jedes Schaubild die entsprechende Funktion an.



kein x^4 , kein $\frac{1}{x^3}$!

2. Differenzenquotient berechnen

Bestimme den Wert des Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ im angegebenen Intervall.

$y_1 = 4, y_2 = -2$ $y_2 - y_1 = 2$

a) $I = [0; 2]$ $x_1 = 0, x_2 = 2$ $x_2 - x_1 = 2$

$x_1 = 0, x_2 = 2$ $x_2 - x_1 = 2$

$y_2 = -2, y_1 = -3,5$ $y_2 - y_1 = 0,5$

c) $I = [-1; 2]$

$y_2 = -3,5, y_2 = -2$ $y_2 - y_1 = 0,5$

d) $I = [-2; 1]$

$-0,5$

3. Differenzenquotient berechnen

Bestimme mithilfe der Wertetabelle den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-82,5	-44	-19,5	-6	-0,5	0	-1,5	-2	1,5	12	32,5	66

a) $I = [0; 4]$

b) $I = [-3; 3]$

c) $I = [-5; 6]$

$y_1 = 0, y_2 = 12$

$x_1 = 0, x_2 = 4$

$DQ = 3$

$y_1 = -19,5, y_2 = 1,5$

$x_1 = -3, x_2 = 3$

$DQ = 3,5$

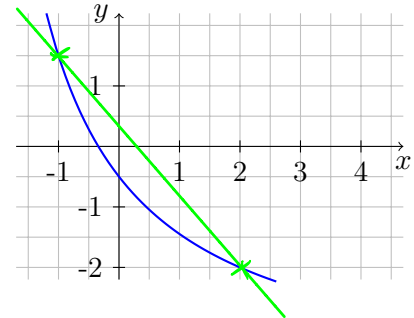
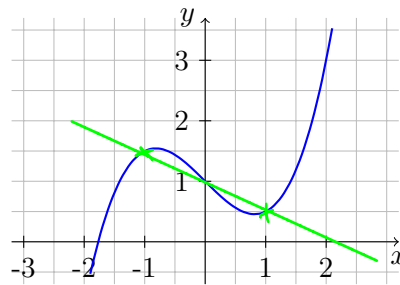
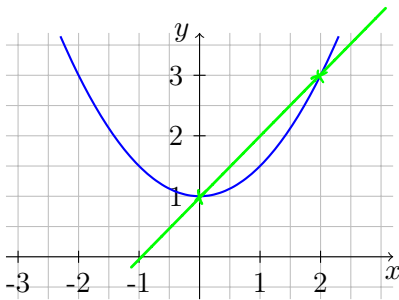
$y_1 = -82,5, y_2 = 66$

$x_1 = -5, x_2 = 6$

$DQ = 13,5$

4. Differenzenquotient bestimmen

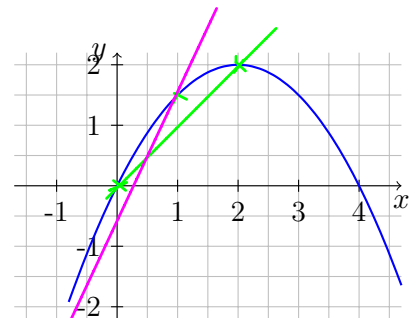
Bestimme mithilfe der Graphen den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.



- a) $I = [0; 2]$ $DQ = 1$ b) $I = [-1; 1]$ $DQ = -0,5$ c) $I = [-1; 2]$ $DQ = -\frac{3,5}{3}$

5. Wahr oder falsch

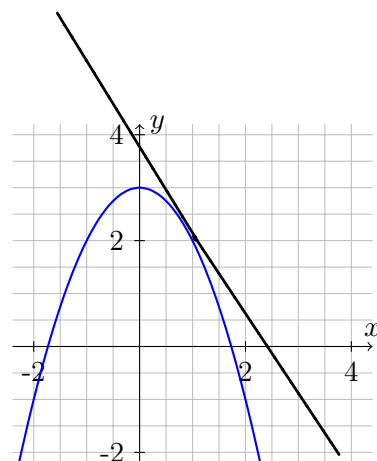
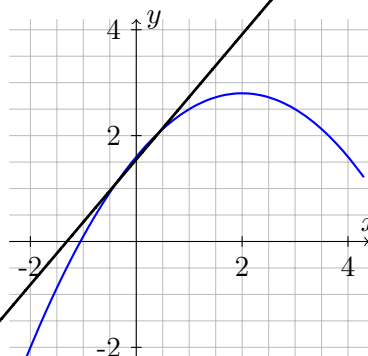
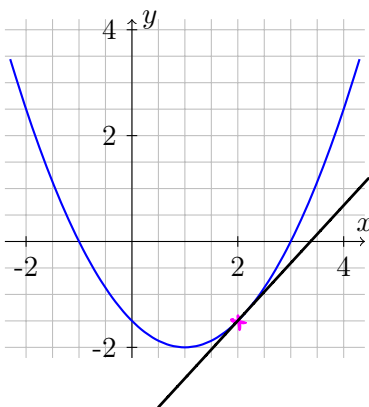
Das Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f . Bestimme, ob die Aussagen zum Differenzenquotienten von f wahr oder falsch sind:



- a) Im Intervall $[0; 2]$ ist der Differenzenquotient 1. ✓ c) Im Intervall $[1; 3]$ ist der Differenzenquotient 0. ✓
 b) Im Intervall $[0; 3]$ ist der Differenzenquotient 1,5. f d) Im Intervall $[0; 4]$ ist der Differenzenquotient positiv. f
 e) Im Intervall $[-1; 1]$ ist der Differenzenquotient kleiner als im Intervall $[0; 2]$ f

6. Ableitung

Bestimme die Ableitung an der angegebenen Stelle x



- a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 1$

Wir wollen nun die Ableitung an der
Stelle $t_1 = 2$ berechnen:

$$\begin{array}{|l} 8.11.18 \\ \hline s(t) = 5 \cdot t^2 \end{array}$$

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(2)}{t_2 - 2}$$

=

○ 4 ☒ Es ist $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie rechnerisch die Ableitung von f an der Stelle

a) 3,

b) 4,

c) 5,

d) -1.

$$f'(3) = 6$$

$$f'(4) = 8$$

$$f'(5) = 10$$

$$f'(-1) = -2$$

$$f(x) = x^2$$

$$a) \quad \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_2^2 - 3^2}{(t_2 - 3)}$$

$$= \frac{(t_2 + 3) \cdot \cancel{(t_2 - 3)}}{\cancel{(t_2 - 3)}} = t_2 + 3$$

$$\Rightarrow f'(3) = 6$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(3) = 3^2$$

$$f(17) = 17^2$$

$$f(t_2) = t_2^2$$

$$g(x) = x^3 - 5 \cdot x^2$$

$$g(3) = (3)^3 - 5 \cdot (3)^2$$

$$g(a) = (a)^3 - 5 \cdot (a)^2$$

$$g(a-5) = (a-5)^3 - 5 \cdot (a-5)^2$$

$$g(-7) = (-7)^3 - 5 \cdot (-7)^2$$

$$f(x) = 5 \cdot x^2$$

$$f'(1) = 10$$

$$f'(7) = 70$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(1) = 2$$

$$f'(7) = 14$$

$$f(x) = 9 \cdot x^2$$

$$f'(2) = 36$$

S. 43

$$f(x) = 3 \cdot x^2$$

$$f'(2) = 12$$

13.11.18

- 9 a) Es ist $f(x) = 3x^2 - 2$. Bestimmen Sie rechnerisch $f'(2)$.
 b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x^2 + 4$. Ermitteln Sie $f'(1)$.

$$f'(2) = \frac{f(t_2) - f(2)}{t_2 - 2}$$

$$f(t_2) = 3 \cdot t_2^2 - 2$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2$$

$$= \frac{(3 \cdot t_2^2 - 2) - (3 \cdot 2^2 - 2)}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{+3 \cdot t_2^2 - 3 \cdot 2^2}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{3 \cdot (t_2^2 - 2^2)}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{3 \cdot (t_2 - 2) \cdot (t_2 + 2)}{t_2 - 2}$$

$$= 3 \cdot (t_2 + 2)$$

$$f'(2) = 3 \cdot (2 + 2) = 12$$

- 9 a) Es ist $f(x) = 3x^2 - 2$. Bestimmen Sie rechnerisch $f'(2)$.
b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x^2 + 4$. Ermitteln Sie $f'(1)$.
c) $f(x) = 4x$, bestimme $f'(3)$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(1) &= \frac{f(t_2) - f(1)}{t_2 - 1} & f(t_2) &= 5 \cdot t_2^2 + 4 \\ & & f(1) &= 5 \cdot 1^2 + 4 \\ &= \frac{5t_2^2 + 4 - (5 \cdot 1^2 + 4)}{t_2 - 1} &= \frac{5t_2^2 + \cancel{4} - 5 \cdot 1^2 - \cancel{4}}{t_2 - 1} \\ &= \frac{5 \cdot (t_2^2 - 1^2)}{t_2 - 1} &= \frac{5(\cancel{t_2 - 1})(t_2 + 1)}{\cancel{t_2 - 1}} = 5(t_2 + 1) \end{aligned}$$

$$f'(1) = 5(1 + 1) = 10$$

- 9 a) Es ist $f(x) = 3x^2 - 2$. Bestimmen Sie rechnerisch $f'(2)$.
b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x^2 + 4$. Ermitteln Sie $f'(1)$.
c) $f(x) = 4x$, bestimme $f'(3)$

$$c) f'(3) = \frac{f(t_2) - f(3)}{t_2 - 3}$$

$$f(t_2) = 4 \cdot t_2$$

$$f(3) = 4 \cdot 3$$

$$= \frac{4 \cdot t_2 - 4 \cdot 3}{t_2 - 3} = \frac{4 \cdot (\cancel{t_2} - \cancel{3})}{\cancel{t_2} - \cancel{3}} = 4$$

$$f'(3) = 4$$

II. 3 Ableitungsregeln

Wir haben folgende Regeln herausgefunden:

1. Bei einer quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ ist die Ableitung an einer Stelle t

$$f'(t) = 2 \cdot t$$

2. Mit einem konstanten Vorfaktor $f(x) = a \cdot x^2$ gilt

$$f'(t) = 2 \cdot a \cdot t$$

3. Bei einer linearen Funktion $f(x) = a \cdot x$ gilt

$$f'(t) = a$$

4. Wird eine Funktion nach oben/unten verschoben, so ändert sich die Ableitung nicht, d.h. von den Funktionen $f(x) = 5x^2$ und $g(x) = 5x^2 - 9$ ist die Ableitung identisch.

Beispiele: $f(x) = 3 \cdot x^2 + 4$

$$f(x) = -7 \cdot x^2 - 3$$

$$f(x) = -5x + 2$$

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - 3x$$

$$f(x) = 2 \cdot x^2$$

$$f(x) = -3x$$

$$f'(2) = 12$$

$$f'(1) = -14$$

$$f'(17) = -5$$

$$f'(1) = 4 - 3 = 1$$

$$f'(1) = 4$$

$$f'(1) = -3$$

15.11.18

5. Haben wir eine Funktion, die aus einer Summe oder Differenz besteht, so bilden wir die Ableitung von den einzelnen Summanden, z.B.

$$f(x) = 3x^2 + 5x,$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 5 = 17$$

6. Bei einer Funktion mit einer höheren Potenz/Exponent $f(x) = x^n$ gilt für die Ableitung an der Stelle t :

$$f'(t) = n \cdot t^{n-1}$$

$$\text{Beispiel: } f(x) = x^3 \quad f'(5) = 3 \cdot 5^2 = 75$$

Beispiele:

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(t) = 2 \cdot t^1$$

$$f(x) = x^1 \rightarrow f'(t) = 1 \cdot \underbrace{t^0}_1$$

$$f(x) = 3 \cdot x^7 \rightarrow f'(t) = 7 \cdot 3 \cdot t^6$$

$$f(x) = 4x^2 - 3x^1 \rightarrow f'(t) = 2 \cdot 4t - 3 \cancel{t^0}$$

$$f(x) = 2 \cdot x^{-3} \rightarrow f'(t) = -3 \cdot 2 \cdot t^{-4}$$

$$f(x) = \frac{5}{x^2} = 5 \cdot x^{-2} \rightarrow f'(t) = -2 \cdot 5 \cdot t^{-3}$$

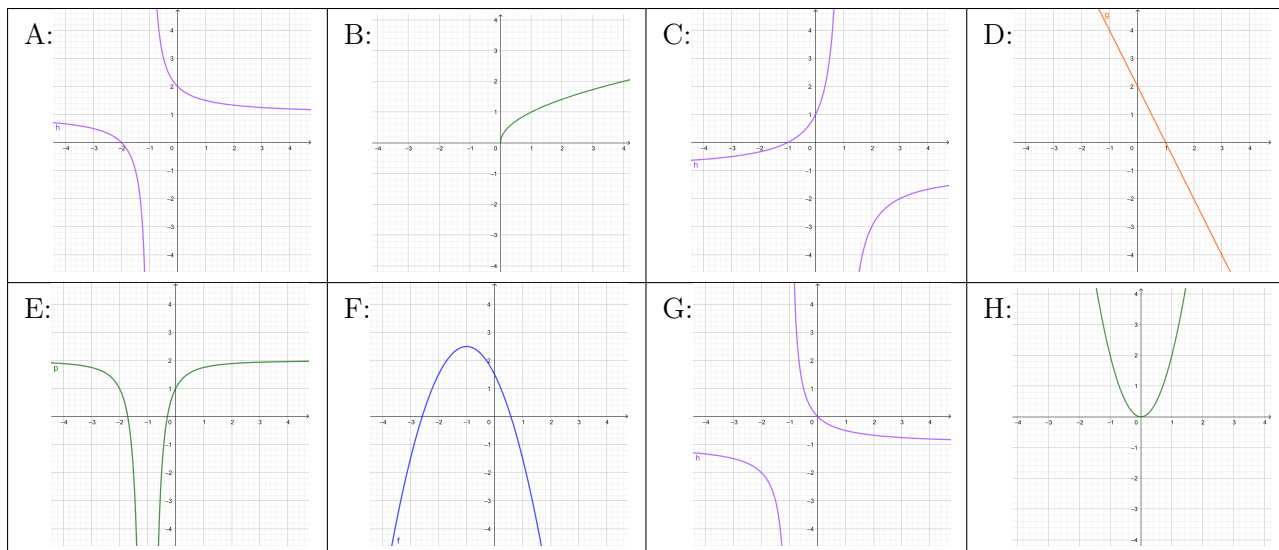
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(t) = \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}}$$

1. Klassenarbeit, 6.11.2018

Name: _____ Punkte: _____/26P Note: _____ mündlich: _____

1. Funktionsgleichungen bestimmen (8P)

Gib für jedes Schaubild die entsprechende Funktion an.



2. Differenzenquotient berechnen (4P)

Bestimme den Wert des Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ im angegebenen Intervall.

$$2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 1$$

a) $I = [0; 2]$

b) $I = [-1; 1]$

c) $I = [-1; 2]$

d) $I = [-2; 1]$

3. Differenzenquotient berechnen (3P)

Bestimme mithilfe der Wertetabelle den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	73	56	21	13	1	-4	-6	2	9	-3	-8	-15

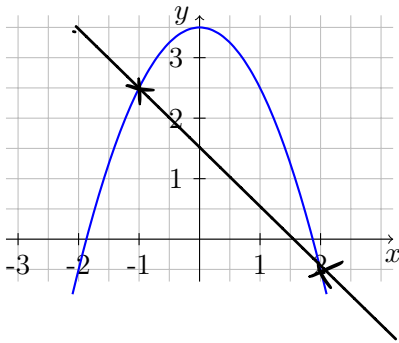
a) $I = [0; 4]$

b) $I = [-3; 3]$

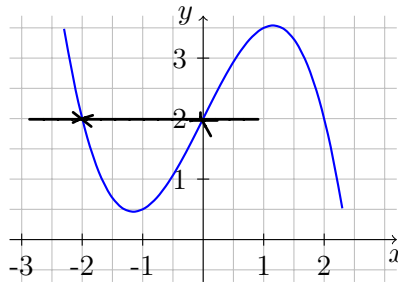
c) $I = [-5; 6]$

4. Differenzenquotient bestimmen (3P)

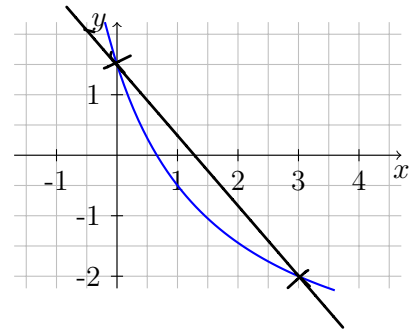
Bestimme mithilfe der Graphen den Differenzenquotienten im angegebenen Intervall.



a) $I = [-1; 2]$



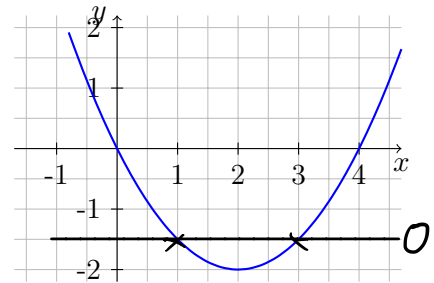
b) $I = [-2; 0]$



c) $I = [0; 3]$

5. Wahr oder falsch (5P)

Das Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f . Bestimme, ob die Aussagen zum Differenzenquotienten (DQ) von f wahr oder falsch sind:



a) Im Intervall $[2; 3]$ ist der DQ 1.

c) Im Intervall $[0; 4]$ ist der DQ 0.

b) Im Intervall $[0; 3]$ ist der DQ -1,5.

d) Im Intervall $[1; 3]$ ist der DQ negativ.

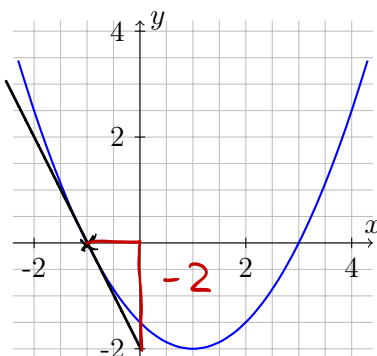
e) Im Intervall $[-0.5; 3]$ ist der DQ kleiner als im Intervall $[0; 2]$

-0,71

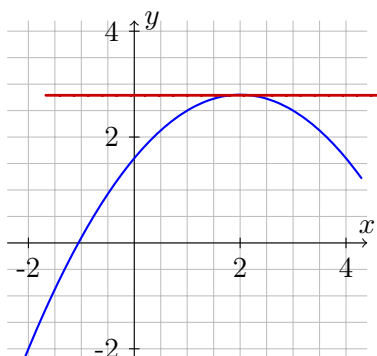
-1

6. Ableitung (3P)

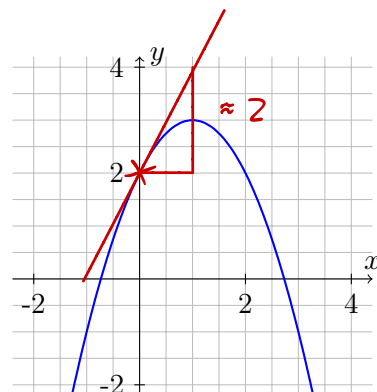
Bestimme die (ungefähre) Ableitung an der angegebenen Stelle x



a) $x = -1$



b) $x = 2$



c) $x = 0$

1 ☒ Bestimmen Sie $f'(x)$ für f mit

- a) $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4 \cdot x^3$ b) $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$ c) $f(x) = x^6$, $f'(x) = 6x^5$ d) $f(x) = x^9$, $f'(x) = 9x^8$
 e) $f(x) = x^8$, $f'(x) = 8x^7$ f) $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$ g) $f(x) = x^{11}$, $f'(x) = 11x^{10}$ h) $f(x) = x^{101}$, $f'(x) = 101x^{100}$

2 ☒ Wie groß ist die Steigung des Graphen von f im gegebenen Punkt A?

- a) $f(x) = x^2$, A(3|9) $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$ b) $f(x) = x^3$, A(2|8) $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$ c) $f(x) = x^9$, A(1|1) $f'(x) = 9x^8$, $f'(1) = 9$ d) $f(x) = x^{20}$, A(-1|1) $f'(x) = 20x^{19}$, $f'(-1) = -20$

3 ☒ Es ist $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Schreiben Sie den Funktionsterm entsprechend um und leiten Sie ab.

- a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^{30}}$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} \quad f'(x) = -3 \cdot x^{-4} \quad f'(x) = -4 \cdot x^{-5} \quad f'(x) = -30 \cdot x^{-31}$$

Die Ableitung von Potenzfunktionen – Potenzregel

 **1** Bestimmen Sie die Ableitung f' .

$f(x)$	x^3	x^5	x^{12}	x^{15}	x^{20}
$f'(x)$	$3 \cdot x^2$	$5 \cdot x^4$	$12x^{11}$	$15x^{14}$	$20x^{19}$
$f(x)$	x^{-3}	x^{-5}	x^{-12}	x^{-15}	x^{-20}
$f'(x)$	$-3x^{-4}$	$-5x^{-6}$	$-12x^{-13}$	$-15x^{-16}$	$-20x^{-21}$

$f(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{1}{x^6} = x^{-6}$	$\frac{1}{x^8} = x^{-8}$
$f'(x)$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$-6x^{-7} = -6 \cdot \frac{1}{x^7}$	$-8x^{-9} = -8 \cdot \frac{1}{x^9}$

2 Geben Sie in der Tabelle an, ob richtig (r) oder falsch (f) abgeleitet wurde. Korrigieren Sie die Fehler gegebenenfalls in der letzten Spalte.

$f(x)$	$f'(x)$	r/f	Korrektur
x^8	$8x^7$	✓	
x^{16}	$16x^{17}$	f	$16x^{15}$
x^{-4}	$-4x^{-3}$	f	$-4x^{-5}$
x^1 $f'(x) = 1 \cdot x^0$	1	✓	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}$	f	$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4$. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x) =$ _____.

a) Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $A(2|16)$.

[illegible]

b) Berechnen Sie die Stelle, an der die Ableitung der Funktion f den Wert -4 annimmt.

[illegible]

c) Bestimmen Sie den Punkt des Graphen von f , in dem die Tangente an den Graphen parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 8x$ verläuft. [T1]

4 Leiten Sie ab.

a) $f(a) = a^3$; $f'(a) =$ _____ b) $g(b) = b^{10}$; $g'(b) =$ _____ c) $h(c) = c$; $h'(c) =$ _____

d) $k(r) = r^{-1}$; $k'(r) = \underline{\hspace{2cm}}$ e) $l(s) = \frac{1}{s^3}$; $l'(s) = \underline{\hspace{2cm}}$ f) $m(t) = \sqrt{t}$; $m'(t) = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $f(x) = x^n$; $f'(x) =$ _____ h) $f(x) = x^{b-1}$; $f'(x) =$ _____ i) $f(x) = x^{2-2k}$; $f'(x) =$ _____

5 Gegeben sind die beiden Funktionen f mit $f(x) = x^3$ und g mit $g(x) = x^4$. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen der Graph von f dieselbe Steigung hat wie der Graph von g . Geben Sie auch die zugehörigen Punkte auf den Graphen von f und g an sowie die Steigung der Tangenten in diesen Punkten.

$f'(x) =$ und $g'(x) =$ Gleichsetzen der Ableitungen und Auflösen nach x:

An den Stellen $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ und $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ haben die Graphen von f und g dieselbe Steigung. Für $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$:

Im Punkt _____ sind die Tangenten an die Graphen von f und g parallel mit der Steigung _____.

Für $x_2 =$: In den Punkten und sind die Tangenten parallel mit der Steigung

[T1] Die Gerade $y = 8x$ hat in jedem Punkt die Steigung 8.

$$f(x) = x^0$$

$$f'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

1 Leiten Sie die Funktion f zweimal ab.

a) $f(x) = 4x^2$

$f'(x) = 4 \cdot 2 \cdot x = 8x$

$f''(x) = 8 \cdot 1 \cdot x^0 = 8$

b) $f(x) = 2x^{-2}$

$f'(x) = -4 \cdot x^{-3}$

$f''(x) = 12 \cdot x^{-4}$

c) $f(x) = 2x^6 + x^3$

$f'(x) = 12 \cdot x^5 + 3 \cdot x^2$

$f''(x) = 60 \cdot x^4 + 6 \cdot x^1$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^{-4}$

$f'(x) = x^3 + 4 \cdot x^{-5}$

$f''(x) = 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x^{-6}$

e) $f(x) = 0,5x^5 - 2x^3$

$f'(x) = 2,5 \cdot x^4 - 6 \cdot x^2$

$f''(x) = 10 \cdot x^3 - 12 \cdot x^1$

f) $f(x) = \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = -16 \cdot x^{-5} - 2 \cdot x^{-3}$

$f''(x) = 80 \cdot x^{-6} + 6 \cdot x^{-4}$

2 Kim hat Ableitungen gebildet. Kontrollieren Sie die Ableitungen (r für richtig und f für falsch) und verbessern Sie gegebenenfalls. Beschreiben Sie auch, worin der Fehler besteht.

	Funktion f	Ableitung	Kontrolle und Verbesserung	Fehlerbeschreibung
a)	$f(x) = x^3 + 3x$	$f'(x) = 3x^2 + 3$	f $f'(x) = 3x^2$	2. Summand wurde nicht abgeleitet.
b)	$f(x) = x \cdot (1 - 3x)$	$f'(x) = -3$	f $f'(x) = 1 - 6x$	
c)	$f(x) = x^2 + x$	$f'(x) = 2x + 1$	r	
d)	$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x$	$f'(x) = \frac{1}{3}x - 4$	f $f'(x) = \frac{4}{3}x - 4$	
e)	$f(t) = tx^2$	$f'(t) = 2tx$	r	

3 Wandeln Sie den Funktionsterm von f um. Geben Sie dann den Grad von f und den Grad der Ableitungsfunktion f' an. Bestimmen Sie f'(x).

a) $f(x) = x^2 \cdot (x - 2)$

=
=

Grad von f: ____; Grad von f': ____

$f'(x) =$ _____

b) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot 5$

=
=

Grad von f: ____; Grad von f': ____

$f'(x) =$ _____

c) $f(x) = 4 \cdot (x^4 + 3) \cdot x^2$

=
=

Grad von f: ____; Grad von f': ____

$f'(x) =$ _____

4 Die Tangente an die Parabel der Funktion f mit $f(x) = 1,5x^2$ im Punkt P soll die Steigung m haben. Bestimmen Sie den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$.

a) $m = 6$

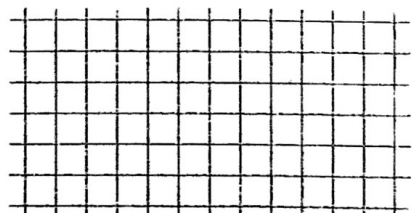
$f'(x) =$ _____, also muss die

Gleichung _____ = 6 gelten.

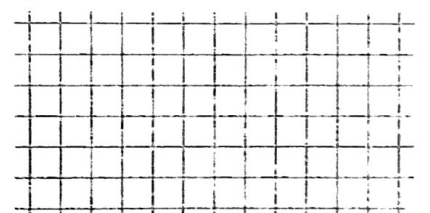
Damit erhält man $x_0 =$ _____

und $P(\text{____} | \text{____})$.

b) $m = 1,5$



c) $m = -2$



5 Verbinden Sie zusammengehörende Karten.

$f(x) = x^2 + tx$

$f(x) = tx^2 + tx$

$f(x) = x^2 - t^2x$

$f(t) = tx^2 + tx$

$f(t) = x^2 - t^2x$

$f(t) = tx^2 - t^2x$

$f(t) = -2tx$

$f(t) = x^2 - 2tx$

$f(t) = x^2 + x$

$f(x) = 2x + t$

$f(x) = 2x - t^2$

$f(x) = 2tx + t$